



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Рубцовский индустриальный институт (филиал)**  
**ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет  
им. И.И. Ползунова»**

**О.В. Ефременкова**

## **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ**

Методическое пособие  
для студентов направления «Электроэнергетика и электротехника»  
заочной формы обучения

**Рубцовск 2013**

Ефременкова О.В. Введение в математику: Методическое пособие для студентов направления «Электроэнергетика и электротехника» заочной формы обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2013.- 71 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения, направления «Электроэнергетика и электротехника». В пособии приводятся различные приложения математики и их применение при решении задач, которые играют большую роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Содержание задач затрагивает также и другие отрасли практических знаний, с которыми будущий инженер-электрик может столкнуться в своей практической деятельности. В целях облегчения самостоятельного решения, более сложные задачи снабжены указаниями, а в отдельных случаях - и полными решениями.

Рассмотрено и одобрено на заседании  
НМС Рубцовского индустриального  
института  
Протокол № 8 от 28.11.2013г.

Рецензент: к.ф.-м.н.

В.Г. Дудник

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА.....	5
1.1. Действия с комплексными числами.....	6
1.2. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.....	10
1.3. Комплексные числа в тригонометрической форме.....	11
1.4. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.....	13
1.5. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.....	17
1.6. Примеры из электротехники.....	20
2. КОМБИНАТОРИКА.....	23
2.1. Предмет комбинаторики.....	23
2.2. Правило суммы и произведения.....	24
2.3. Формула включения и исключения.....	26
2.4. Размещения с повторениями.....	28
2.5. Перестановки.....	30
2.6. Сочетания.....	32
3. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.....	35
3.1. Понятие множества.....	35
3.2. Способы задания множества.....	37
3.3. Отношения между множествами.....	38
3.4. Основные операции над множествами.....	39
3.5. Свойства объединения и пересечения множеств.....	39
3.6. Разбиение множества на классы. Классификация.....	40
4. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.....	41
4.1. Представление чисел в различных системах счисления.....	44
5. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ.....	47
5.1. Доказательства тождеств: задачи арифметического характера.....	49
5.2. Тригонометрические и алгебраические задачи.....	51
5.3. Задачи на доказательство неравенств.....	52
6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМАМ.....	53
6.1. Комплексные числа.....	53
6.2. Комбинаторика.....	55
6.3. Множества и операции над ними.....	64
6.4. Метод математической индукции.....	69
6.5. Бином Ньютона.....	69
Список литературы.....	70

## ВВЕДЕНИЕ

Математика выделяется среди всех наук своей универсальностью. Методы математического исследования составляют неотъемлемую часть практически всех наук. Математика работает во всех областях человеческой деятельности, и полученные результаты подтверждаются экспериментально. Применение математических методов исследования повышает объективную ценность научных знаний. Это обстоятельство накладывает на курс математики специфический оттенок. Данная дисциплина формирует у студентов творческо-исследовательский подход к будущей профессиональной деятельности специалиста, обладающего гибким научным мышлением.

### Цели и задачи дисциплины

*Цель* изучения дисциплины «Введение в математику» заключается в установлении некоторого объема достаточно стабильных фундаментальных знаний у студентов, обучающихся по направлению «Электроэнергетика и электротехника», а также в ознакомлении с различными приложениями высшей математики и их применениями при решении задач, которые играют большую роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях.

Перечисленные цели предусматривают решение следующих *задач*:

- воспитание строгости логических суждений и развитие алгоритмического мышления;
- ознакомление с основными методами исследования при решении математических задач и овладение ими;
- приобретение умений и навыков использовать математический аппарат в различных смежных и профессионально направленных предметах.

### Место дисциплины в учебном плане

Дисциплина «Введение в математику» изучается в течение первого семестра обучения и потому может опираться на изученные в школе курсы математики.

Дисциплина «Введение в математику» является дисциплиной естественнонаучного цикла, формирующая у студентов творческий подход к деятельности инженера с нестандартным видением и оригинальным подходом к современным процессам, обладающего гибким творческим научным мышлением, способного чутко реагировать на изменения в развитии общества, научно-технического прогресса. Поэтому, в первую очередь, в преподавании данной дисциплины следует обратить внимание на привитие у студентов навыков нестандартного мышления при решении задач, позволяющих достигать поставленных целей с наименьшими затратами всех видов ресурсов.

## 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

**Комплексным числом  $z$**  называется *упорядоченная пара чисел  $(a,b)$* , над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение, умножение, деление, возведение в степень, результаты которых также являются комплексными числами.

**Алгебраической формой комплексного числа  $z$**  называется выражение  $z = a + ib$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа,  $i$  – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число  $a$  называется **действительной частью** числа  $z$  ( $a = \operatorname{Re} z$ ), а  $b$  – **мнимой частью** ( $b = \operatorname{Im} z$ ).

Если  $a = \operatorname{Re} z = 0$ , то число  $z$  будет чисто мнимым, если  $b = \operatorname{Im} z = 0$ , то число  $z$  будет действительным.

Числа  $z = a + ib$  и  $\bar{z} = a - ib$  называются **комплексно – сопряженными**.

Два комплексных числа  $z_1 = a_1 + ib_1$  и  $z_2 = a_2 + ib_2$  называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2.$$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет **геометрическое истолкование**. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости (комплексной плоскости  $z$ ) – координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная – мнимой осью (рис. 1.1).

Таким образом, на оси  $OX$  располагаются действительные числа  $a$ , а на оси  $OY$  – чисто мнимые  $-b$ .

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой **тригонометрической форме**.

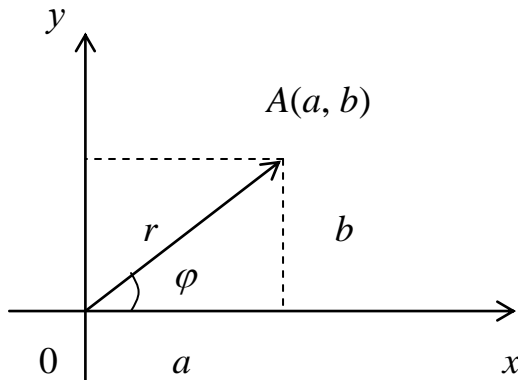


Рис. 1.1

### Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что  $a = r \cos \phi$ ;  $b = r \sin \phi$ . Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \phi + ir \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

При этом величина  $r$  называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона  $\phi$  - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \phi = \text{Arg } z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \phi = \text{Arg } z = \text{arctg} \frac{b}{a}.$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \text{Arg } z = -\text{Arg } \bar{z}.$$

## 1.1. Действия с комплексными числами

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

4) Возведение в степень.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где  $n$  – целое положительное число.

Это выражение называется *формулой Муавра*.

(Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

*Задача 1.1.* Найти формулы  $\sin 2\varphi$  и  $\cos 2\varphi$ .

*Решение.*

Рассмотрим некоторое комплексное число  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Тогда с одной стороны  $z^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)$ .

По формуле Муавра:  $z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ .

Приравнявая, получим  $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi$ .

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Получили известные формулы двойного угла.

5) Извлечение корня из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда:  $\rho = \sqrt[n]{r}$ ;  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ ;  $k \in Z$ .

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right).$$

Таким образом, корень  $n$  – й степени из комплексного числа имеет  $n$  различных значений.

### Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию  $w = e^z$ ;  $z = x + iy$ .

Можно показать, что функция  $w$  может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера**. Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

$$1) e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2};$$

$$2) e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}};$$

$$3) (e^z)^m = e^{mz}; \text{ где } m \text{ – целое число.}$$

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ( $x=0$ ), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и воспользоваться формулой Эйлера:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Полученное равенство и есть *показательная форма комплексного числа*.

### Разложение многочлена на множители.

Функция вида  $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$  называется *целой рациональной функцией* от  $x$ .

**Теорема Безу.** (Этьенн Безу (1730 – 1783) – французский математик)

*При делении многочлена  $f(x)$  на разность  $(x - a)$  получается остаток, равный  $f(a)$ .*

**Следствие.** *Если,  $a$  – корень многочлена, т.е.  $f(a) = 0$ , то многочлен  $f(x)$  делится на  $(x - a)$  без остатка.*



Если уравнение имеет вид  $P(x) = 0$ , где  $P(x)$  – многочлен степени  $n$ , то это уравнение называется *алгебраическим* уравнением степени  $n$ .

**Теорема. (Основная теорема алгебры)** *Всякая целая рациональная функция  $f(x)$  имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.*

**Теорема.** *Всякий многочлен  $n$  – й степени разлагается на  $n$  линейных множителей вида  $(x - a)$  и множитель, равный коэффициенту при  $x^n$ .*

**Теорема.** *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}.$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

$k_i$  - кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что *любой многочлен  $n$  – ой степени имеет ровно  $n$  корней (действительных или комплексных).*

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

Рассмотрим пример действий с комплексными числами.

**Пример 1.1.** Даны два комплексных числа  $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$ ;  $z_2 = -7 - 2i$ . Требуется

а) найти значение выражения  $\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4}$  в алгебраической форме, б) для числа

$z = 2 - 2\sqrt{3}i$  найти тригонометрическую форму, найти  $z^{20}$ , найти корни уравнения  $w^3 + z = 0$ .

*Решение.*

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i}\right)^4 = 16\left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^4.$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения:  $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$ .

б) Число  $z = 2 - 2\sqrt{3}i$  представим в виде  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где

$$r = |z| = \sqrt{4+12} = 4; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -60^\circ.$$

Тогда  $z = 4(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$ .

Для нахождения  $z^{20}$  воспользуемся формулой Муавра.

$$\begin{aligned} z^{20} &= 4^{20}(\cos 1200^\circ - i \sin 1200^\circ) = 4^{20}(\cos(3 \cdot 2\pi + 120^\circ) - i \sin(3 \cdot 2\pi + 120^\circ)) = \\ &= 4^{20}(\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ) = -4^{20} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right). \end{aligned}$$

Если  $w^3 + z = 0$ , то  $w = \sqrt[3]{z}$ .

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{3} \right) = \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{-60^\circ + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-60^\circ + 2\pi k}{3} \right); \quad k \in Z.$$

## 1.2. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Алгебраической формой комплексного числа  $z = (a, b)$  называется алгебраическое выражение вида

$$z = a + bi.$$

Арифметические операции над комплексными числами  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$ , записанными в алгебраической форме, осуществляются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i,$$

т.е. сложение (вычитание) осуществляются по правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

2. Произведение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i,$$

т.е. умножение производится по обычному правилу умножения многочленов, с учетом того, что  $i^2 = -1$ .

3. Деление двух комплексных чисел осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1i)}{(a_2 + b_2i)} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{a^2 + b^2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) \cdot i}{a^2 + b^2}, \quad (z_2 \neq 0),$$

т.е. деление осуществляется умножением делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Возведение в степень комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n.$$

Легко показать, что

$$z^n z^m = z^{n+m},$$

$$(z^n)^m = z^{nm},$$

$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

**Пример 1.2.** Найти сумму комплексных чисел  $z_1 = 2 - i$  и  $z_2 = -4 + 3i$ .

$$z_1 + z_2 = (2 + (-1) \cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3) i = -2 + 2i.$$

**Пример 1.3.** Найти произведение комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 3i \text{ и } z_2 = -4 + 5i.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3i) + 2 \cdot 5i - 3i \cdot 5i = 7 + 22i.$$

**Пример 1.4.** Найти частное  $z$  от деления  $z_1 = 3 - 2i$  на  $z_2 = 3 - i$ .

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{3 - i} = \frac{(3 - 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{11 - 3i}{9 + 1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10}i.$$

**Пример 1.5.** Решить уравнение:  $3x - (1 - i)(x - yi) = 2 + 3i$ ,  $x$  и  $y \in \mathbf{R}$ .

$$3x - ((x - y) + (-x - y)i) = 2 + 3i$$

$$(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i.$$

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

откуда  $x = -1$ ,  $y = 4$ .

**Пример 1.6.** Вычислить:  $i^2$ ,  $i^3$ ,  $i^4$ ,  $i^5$ ,  $i^6$ ,  $i^{-1}$ ,  $i^{-2}$ .

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1.$$

**Пример 1.7.** Вычислить  $z^{-3}$ , если  $z = 1 - i$ .

$$\begin{aligned} z^{-3} &= (1 - i)^{-3} = \frac{1}{(1 - i)^3} = \frac{1}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \frac{1}{-2 - 2i} = \frac{-2 + 2i}{(-2)^2 + (-2)^2} = \\ &= \frac{-2 + 2i}{8} = -0.25 + 0.25i. \end{aligned}$$

**Пример 1.8.** Вычислить число  $z^{-1}$  обратное числу  $z = 3 - i$ .

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3 - i} = \frac{3 + i}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{3^2 + 1^2} = \frac{3 + i}{10} = 0.3 + 0.1i.$$

### 1.3. Комплексные числа в тригонометрической форме

*Комплексной плоскостью* называется плоскость с декартовыми координатами  $(x, y)$ , если каждой точке с координатами  $(a, b)$  поставлено в соответствие

комплексное число  $z = a + bi$ . При этом ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой*. Тогда каждое комплексное число  $a + bi$  геометрически изображается на плоскости как точка  $A(a, b)$  или вектор  $\overline{OA}$ .

Следовательно, положение точки  $A$  (и, значит, комплексного числа  $z$ ) можно задать длиной вектора  $|\overline{OA}| = r$  и углом  $\varphi$ , образованным вектором  $|\overline{OA}|$  с положительным направлением действительной оси. Длина вектора называется *модулем комплексного числа* и обозначается  $|z|=r$ , а угол  $\varphi$  называется *аргументом комплексного числа* и обозначается  $\varphi = \arg z$ .

Ясно, что  $|z| \geq 0$  и  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .

Из рис. 2.1 видно, что  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Из рис. 2.1 видно также, что если  $z = a + bi$  и  $\varphi = \arg z$ , то

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Если  $z \in \mathbf{R}$  и  $z > 0$ , то  $\arg z = 0 + 2\pi k$ ;

если  $z \in \mathbf{R}$  и  $z < 0$ , то  $\arg z = \pi + 2\pi k$ ;

если  $z = 0$ ,  $\arg z$  не определен.

Главное значение аргумента определяется на отрезке  $0 \leq \arg z \leq 2\pi$  либо  $-\pi \leq \arg z \leq \pi$ .

**Пример 1.9.** Найти модуль комплексных чисел  $z_1 = 4 - 3i$  и  $z_2 = -2 - 2i$ .

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

**Пример 1.10.** Определить на комплексной плоскости области, задаваемые условиями:

$$1) |z| = 5; 2) |z| \leq 6; 3) |z - (2+i)| \leq 3; 4) 6 \leq |z - i| \leq 7.$$

1)  $|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5^2$  - уравнение окружности радиусом 5 и с центром в начале координат.

2) Круг радиусом 6 с центром в начале координат.

3) Круг радиусом 3 с центром в точке  $z_0 = 2 + i$ .

4) Кольцо, ограниченное окружностями с радиусами 6 и 7 с центром в точке  $z_0 = i$ .

**Пример 1.11.** Найти модуль и аргумент чисел: 1)  $z_1 = 1 + \sqrt{3}$ ; 2)  $z_2 = -2 - 2i$ .

$$1) z_1 = 1 + \sqrt{3}; a = 1, b = \sqrt{3} \Rightarrow r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi_1 = \frac{a}{r} \Rightarrow \cos \varphi_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi_1 = \frac{b}{r} \Rightarrow \sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$2) z_2 = -2 - 2i; a = -2, b = -2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_2 &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi_2 &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Указание: при определении главного аргумента воспользуйтесь комплексной плоскостью.

Используя формулы  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$ , можно перейти от алгебраической формы записи комплексных чисел к *тригонометрической форме* (формула Муавра):

$$z = a + bi = r \cos \varphi + i \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Комплексные числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число, кратное  $2\pi$ .

**Пример 1.12.** Записать числа в тригонометрической форме:

$$1) z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 2) z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 3) z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 4) z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$1) z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad r = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi_1 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}.$$

(За значение угла берем наименьшее неотрицательное из возможных значений аргумента.)

$$\text{Таким образом: } z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

$$2) z_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_2 = 1, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$3) z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad r_3 = 1, \quad \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

$$4) z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad r_4 = 1, \quad \varphi_4 = \frac{5\pi}{3}, \quad z_4 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}.$$

#### 1.4. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

##### 1) Умножение.

При перемножении чисел  $z_1$  и  $z_2$ , заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

(Формула справедлива для любого конечного числа сомножителей.)

$$z_1 \dots z_n = r_1 \dots r_n (\cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)).$$

Если  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , то последняя принимает вид

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

и называется *формулой Муавра*. Она показывает, что для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

**Пример 1.13.** Выполнить умножение:

$$z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}).$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) = 6(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}).$$

**Пример 1.14.** Вычислить:  $(1+i)^{30}$ .

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \quad (1+i)^{30} = \left(\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})\right)^{30} = (\sqrt{2})^{30} (\cos \frac{30\pi}{4} + i \sin \frac{30\pi}{4}) = \\ &= 2^{15} (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}). \end{aligned}$$

2) Деление.

Если  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , то

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

т.е. модуль частного двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  равен частному модулей, а аргумент частного – разности аргументов.

**Пример 1.15.**  $z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ ,  $z_2 = 2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ . Найти частное.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3})) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}).$$

Формула Муавра  $((\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad n \in \mathbf{N})$  находит много применений. Так, например, если  $n = 3$ , то, возведя левую часть по формуле сокращенного умножения в куб, получим равенство

$$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi) + (3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - \sin^3 \varphi)i.$$

Из равенства комплексных чисел и основного тригонометрического тождества получаем

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = -4 \sin^3 \varphi + 3 \sin \varphi.$$

С помощью формулы Муавра можно находить суммы тригонометрических функций.

Например, найдем сумму  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x$ ,  $x \neq \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ .

Рассмотрим сумму

$$S(x) = (\cos x + i \sin x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + \dots + (\cos(2n-1)x + i \sin(2n-1)x).$$

Из формулы Муавра имеем:  $(\cos kx + i \sin kx) = (\cos x + i \sin x)^k$ .

Таким образом, сумма  $S(x)$  примет вид:

$$S(x) = (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^3 + \dots + (\cos x + i \sin x)^{2n-1}.$$

Эта сумма есть геометрическая прогрессия из  $n$  слагаемых с первым членом  $b_1 = \cos x + i \sin x$  и знаменателем прогрессии  $q = (\cos x + i \sin x)^2$ . По формуле

$S = \frac{b_1 - q^n b_1}{1 - q}$  для суммы  $n$  членов геометрической прогрессии, имеем

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos x + i \sin x)^{2n+1}}{1 - (\cos x + i \sin x)^2} = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos(2n+1)x + i \sin(2n+1)x)}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x - 2i \sin x \cos x} = \\ &= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x)}{2 \sin x (\sin x - i \cos x)} = \\ &= \frac{((\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x))(\sin x + i \cos x)}{2 \sin x} = \\ &= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x) \sin x - (\sin x - \sin(2n+1)x) \cos x}{2 \sin x} + \\ &+ i \frac{((\sin x - \sin(2n+1)x) \sin x + (\cos x - \cos(2n+1)x) \cos x)}{2 \sin x}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} S(x) = \frac{\sin^2 x - (\sin(2n+1)x) \sin x + \cos^2 x - (\cos(2n+1)x) \cos x}{2 \sin x} = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \frac{\cos x \sin x - (\cos(2n+1)x) \sin x - \sin x \cos x + (\sin(2n+1)x) \cos x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

В исходном выражении для  $S(x)$  было:

$$\operatorname{Im} S(x) = \sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x,$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x.$$

Сравнивая мнимые и действительные части, получаем следующие формулы:

$$\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

3) Извлечение корня из комплексного числа.

**Корнем  $n$ -й степени**,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , из числа  $z$  называется любое комплексное число  $u$ , для которого  $n$ -я степень равна  $z$ :

$$\sqrt[n]{z} = u, \quad z = u^n.$$

В поле комплексных чисел справедлива следующая теорема:

для любого  $z \neq 0$  извлечение корня  $n$ -ой степени,  $n \geq 2$ , из числа  $z$  всегда возможно и имеет ровно  $n$  различных значений.

Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Искомый корень  $n$ -ой степени обозначим  $u = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

По определению корня имеем  $u^n = z$ . Откуда следует, что

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Из равенства комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Так как  $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Rightarrow \rho \geq 0 \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ .

Таким образом, модуль комплексного числа  $u$  определяется как арифметический корень из действительного положительного числа  $r$ , а аргумент находят по формуле

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

*Общая формула Муавра*

$$u_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

**Пример 1.16.** Вычислить  $u = \sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$ .

Представим число  $z = \sqrt{3} - i$  в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3} - i = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Поэтому согласно общей формуле Муавра

$$u_k = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6} \right),$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

Таким образом, значения корней:

$$u_0 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{36} - i \sin \frac{\pi}{36} \right),$$

$$u_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 1}{6} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 1}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{36} + i \sin \frac{11\pi}{36} \right),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 2}{6} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 2}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{23\pi}{36} + i \sin \frac{23\pi}{36} \right),$$

$$u_3 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 3}{6} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 3}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{35\pi}{36} + i \sin \frac{35\pi}{36} \right),$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 4}{6} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 4}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{47\pi}{36} + i \sin \frac{47\pi}{36} \right),$$

$$u_5 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 5}{6} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 5}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{59\pi}{36} + i \sin \frac{59\pi}{36} \right).$$

Геометрически корни можно интерпретировать как числа, изображающие в комплексной плоскости вершины правильного  $n$  угольника (в рассмотренном примере – шестиугольника), вписанного в окружность радиусом  $\sqrt[n]{r}$  (в рассмотренном примере – радиусом  $\sqrt[6]{2}$ ), с центром в начале координат.



**Пример 1.17.** Найти: 1)  $\sqrt[4]{1}$ , 2)  $\sqrt[3]{i}$ , 3)  $\sqrt[3]{1}$ .

*Решение.*

$$1) u_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[4]{1} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{4} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$u_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$u_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$u_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$u_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

$$2) u_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right) = \\ = \cos \frac{\pi + 4\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 4\pi k}{6}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$u_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),$$

$$u_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i),$$

$$u_2 = \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

$$3) u_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)} = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$u_0 = \cos \frac{2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 0}{3} = 1,$$

$$u_1 = \cos \frac{2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 1}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$u_2 = \cos \frac{2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 2}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### 1.5. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Помимо алгебраической и тригонометрической имеется еще *показательная форма записи комплексного числа*, которая широко используется в различных приложениях, в частности в электротехнике.

Пусть  $z(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , зависит от действительной переменной  $\varphi$ .

Сопоставим взаимно однозначным образом каждому комплексному числу  $z(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$  комплексно показательное выражение  $u(\varphi) = e^{i\varphi}$ . С помощью операций дифференцирования можно показать, что эти выражения имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим полагают по определению

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Эта формула называется формулой Эйлера и представляет собой определение комплексной показательной функции  $e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  – любое действительное число.

Пусть дано комплексное число  $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ . Сопоставляя это с предыдущей формулой, получаем

$$z = re^{i\varphi}.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной формой* комплексного числа.

В этой форме записи удобно осуществлять операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Соответствующие формулы записываются следующим образом.

Пусть  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ . Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

**Пример 1.18.** Найти показательную форму чисел:

а)  $z_1 = 1 + i$ ; б)  $z_2 = -\sqrt{3} - i$ .

*Решение.*

а)  $r = |z_1| = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = \arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $z_1 = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

б)  $r = |z_2| = 2$ ,  $\varphi = \arg z_2 = \frac{7\pi}{6}$ ,  $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2 e^{i\frac{7\pi}{6}}$ .

**Пример 1.19.** Найти алгебраическую форму чисел:

а)  $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ , б)  $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}}$ , в)  $z_3 = e^{-3+4i}$ .

*Решение.*

а)  $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$ ,

б)  $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}} = 3(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$ ,

в)  $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3} \cdot e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i \sin 4) \approx 0.05(-0.65 - 0.76i) \approx -0.03 - 0.038i$ .

**Пример 1.20.** Найти  $z_1 z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ , результат записать в тригонометрической

форме:

а)  $z_1 = 3e^{\frac{2i}{3}}$ ,  $z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$ ; б)  $z_1 = e^{3-7i}$ ,  $z_2 = e^{-4+5i}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } z_1 z_2 = 3e^{\frac{2i}{3}} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5i}{6}} = 18\left(\cos \frac{5}{6} + i \sin \frac{5}{6}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{1}{2} + i \sin \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{б) } z_1 z_2 = e^{3-7i} \cdot e^{-4+5i} = e^{-1-2i} = e^{-1}(\cos(-2) + i \sin(-2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{7-12i} = e^7(\cos 12 - i \sin 12).$$

**Пример 1.21.** Вычислить: а)  $z^4$ , б)  $\sqrt[5]{z}$ , где  $z = 2e^{-3i}$ .

*Решение:*

$$\text{а) } z^4 = (2e^{-3i})^4 = 16e^{-12i} = 16(\cos 12 - i \sin 12) \approx 16(0.8438 + 0.5366i),$$

$$\text{б) } \sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi k}{5}i} = u_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$u_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{3}{5} - i \sin \frac{3}{5}\right) \approx 0.95 - 0.65i,$$

$$u_1 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi}{5}i} \approx 0.91 + 0.70i,$$

$$u_2 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+4\pi}{5}i} \approx -0.39 + 1.08i,$$

$$u_3 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+6\pi}{5}i} \approx -1.15 - 0.03i,$$

$$u_4 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+8\pi}{5}i} \approx -0.33 - 1.10i.$$

Теория комплексных чисел может быть использована при решении геометрических задач на плоскости; и наоборот, факты геометрического характера позволяют доказывать некоторые соотношения и тождества для комплексных чисел.

**Пример 1.22.** Пусть  $|z_1| = |z_2| = c$ . Доказать, что  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$ .

Поскольку  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ , то

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - \\ &- (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 4c^2. \end{aligned}$$

Геометрически этот факт означает, что сумма квадратов длин диагоналей ромба равна сумме квадратов длин всех его сторон (рис. 1.2).

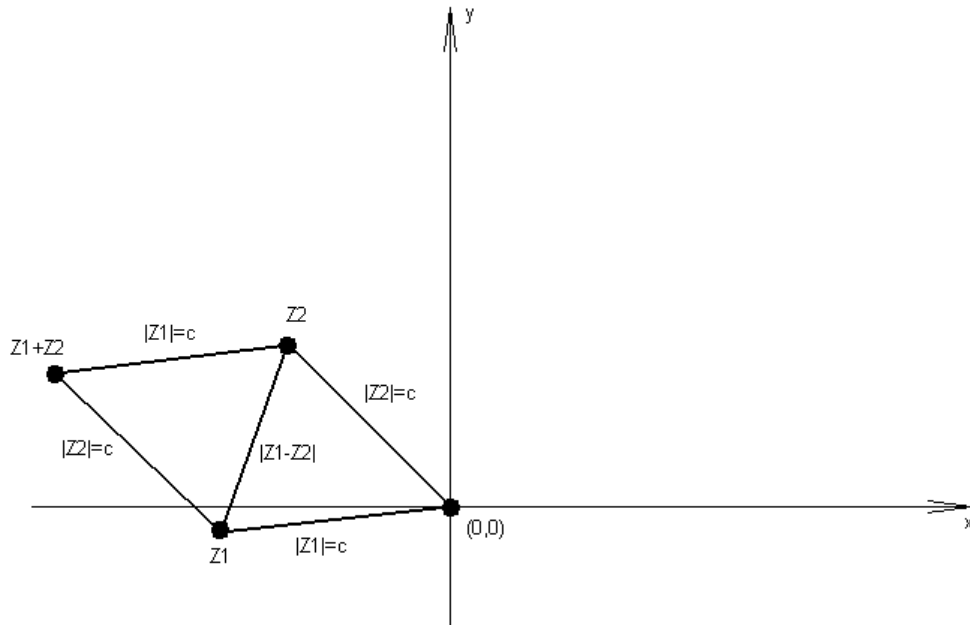


Рис. 1.2

Действительно, точки плоскости, соответствующие комплексным числам  $0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_1 + z_2$ , являются вершинами ромба, для которого  $|z_1|$  и  $|z_2|$  — длины его сторон, а  $|z_1 + z_2|$  и  $|z_1 - z_2|$  — длины его диагоналей.

**Пример 1.23.** Пусть  $z_1, z_2, z_3, z_4$  — различные комплексные числа и  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ . Доказать, что  $|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3|$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3| &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = \\ &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)|, \end{aligned}$$

т. к. число  $\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$  вещественно и положительно (докажите это самостоятельно). Кроме того,

$$\begin{aligned} |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| &= \\ = |-z_1z_4 - z_2z_3 + z_1z_2 + z_4z_3| &= |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| = |z_1 - z_3||z_2 - z_4|. \end{aligned}$$

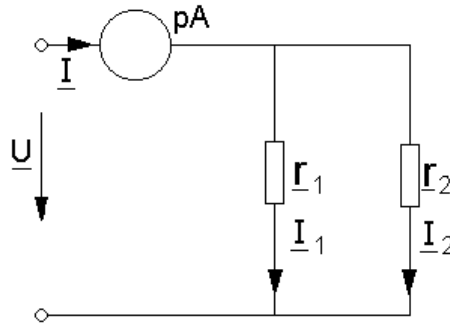
Доказанное равенство известно в планиметрии как теорема Птолемея: произведение длин диагоналей выпуклого вписанного в окружность четырехугольника равно сумме парных произведений длин его противоположных сторон.

## 1.6. Примеры из электротехники

### Пример 1.24.

Определить ток в неразветвленной части схемы (показания амперметра электромагнитной системы), если  $I_1 = 3 + j4, A$ ;  $I_2 = 5 - j8, A$ .

*Решение.* В электротехнике мнимую единицу обозначают  $j$ .



Ток  $\underline{I}$  можно определить по I закону Кирхгофа  $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2, A$ :

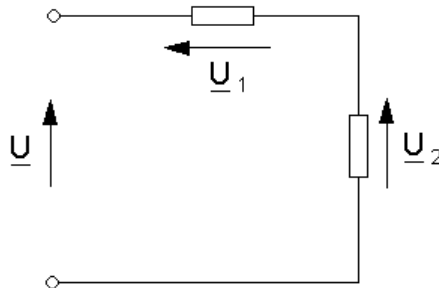
$$\underline{I} = 3 + j4 + 5 - j8 = 8 - j4, A.$$

Амперметр электромагнитной системы показывает действующее значение тока, поэтому перейдем к показательной форме

$$\underline{I} = \sqrt{8^2 + 4^2} e^{-j \arctg \frac{4}{8}} = 8.944 e^{-j26.5}, A.$$

Показания амперметра 8.944.

### Пример 1.25.



Определить мгновенное значение напряжения на входе электрической цепи, если

$$\underline{U}_1 = 50e^{j30}, B; \quad \underline{U}_2 = 60e^{-j60} B.$$

Решение. По II закону Кирхгофа

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2.$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= 50e^{j30} + 60e^{-j60} = 50 \cos 30 + j50 \sin 30 + 60 \cos - j60 \sin 60 = \\ &= 43.3 + j25 + 30 - j51.96 = 73.3 - j26.96, B. \end{aligned}$$

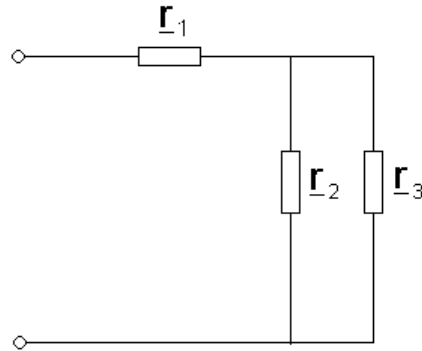
Перейдем к показательной форме

$$\underline{U} = \sqrt{73.3^2 + 26.96^2} e^{-j \arctg \frac{26.96}{73.3}} = 78.1 e^{-j20.2} B.$$

Запишем мгновенное значение

$$\underline{U}(t) = U_m \sin(10t + \varphi) = 78.1\sqrt{2} \sin(314t - 20.2), B.$$

**Пример 1.26.**



Определить комплекс входного сопротивления цепи, если

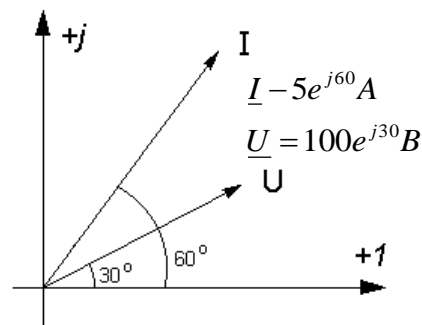
$$r_1 = 3 - j4, \text{ Ом.}$$

$$r_2 = 5 + j6, \text{ Ом.}$$

$$r_3 = 4 - j8, \text{ Ом.}$$

$$\begin{aligned} \underline{r} &= r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} = 3 - j4 + \frac{(5 + j6)(4 - j8)}{5 + j6 + 4 - j8} = \\ &= 3 - j4 + \frac{20 + j24 - j40 + 48}{9 - j2} = \\ &= 3 - j4 + \frac{(68 - j16)(9 + j2)}{(9 + j2)(9 + j2)} = \\ &= 10.576 - j4.094; \text{ Ом.} \end{aligned}$$

**Пример 1.27.**

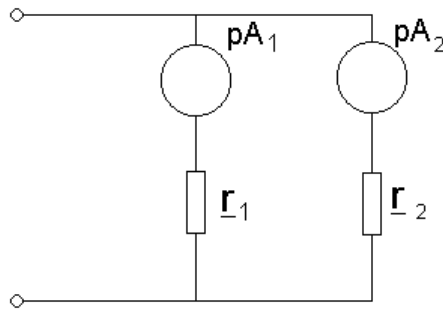


Записать комплексное сопротивление цепи в алгебраической форме, если ток и напряжение указаны на рисунке.

*Решение.* По закону Ома

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{100e^{j30}}{5e^{j60}} = 20e^{-j30} = \\ &= 20 \cos 30 - j20 \sin 30 = 16.2 - j10, \text{ Ом.} \end{aligned}$$

### Пример 1.28.



Показания какого амперметра электромагнитной системы больше, если  $\underline{I}_1 = 3 + j4, A$   $\underline{I}_2 = 2.5 - j4.7, A$ ?

*Решение.* Перейдем к показательной форме

$$\underline{I}_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{j \arctg \frac{3}{4}} = 5e^{j53}, A.$$

$$\underline{I}_2 = \sqrt{2.5^2 + 4.7^2} e^{-j \arctg \frac{4.5}{2.5}} = 5.324e^{-j62}, A.$$

Действующее значение

$$I_1 = 5A.$$

$$I_2 = 5.324A.$$

$$I_2 > I_1.$$

## 2. КОМБИНАТОРИКА

### 2.1. Предмет комбинаторики

*Комбинаторика* – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного множества, в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией.

Целью комбинаторики является изучение комбинаторных конфигураций, вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление и подсчет количества.

Возникновение основных понятий и развитие комбинаторики шло параллельно с развитием других разделов математики, таких как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с которыми комбинаторика тесно связана. Некоторые факты комбинаторики были известны еще математикам Древнего Востока.

В XVI веке комбинаторные задачи касались в основном азартных игр – вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три игральные кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре.

Одним из первых занялся изучением вопросов комбинаторики итальянский математик Тарталья. Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами французских ученых Б. Паскаля и П. Ферма. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Бернулли, Лейбница и Эйлера.

В 50-х годах XX века интерес к комбинаторике возрождается в связи с бурным развитием вычислительной техники и дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения задач теории планирования и теории информации, а также для установления свойств и выявления применимости используемых алгоритмов.

## 2.2. Правило суммы и произведения

Большинство комбинаторных задач решаются с помощью двух основных правил: суммы и произведения.

### **Правило произведения**

#### *Задача 2.1.*

В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюда. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

#### *Решение.*

Чашку можно выбрать 5 способами. Для каждого способа выбора чашки существует 3 способа выбора блюда. Таким образом, имеем  $5 \cdot 3 = 15$  способов выбора пары предметов.

*Если некоторый объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары  $(A, B)$  можно осуществить  $m \cdot n$  способами. Это утверждение называют правилом произведения.*

Для доказательства правила произведения заметим, что каждый из  $m$  способов выбора объекта  $A$  можно совместить с  $n$  способами выбора объекта  $B$ . А это приводит к  $m \cdot n$  способам выбора пары  $(A, B)$ .

Может возникнуть ситуация, когда необходимо составить комбинацию из большего числа элементов.

#### *Задача 2.2.*

В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюда и ложки?

#### *Решение.*

Из решения предыдущей задачи известно, что существует  $5 \cdot 3 = 15$  способов выбора пары предметов чашка – блюдо. Для каждого способа выбора этой пары существует 4 способа выбора ложки. Таким образом, по правилу произведения имеем  $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$  способов выбора комплекта из чашки, блюда и ложки.



## Правило суммы

### Задача 2.3.

Из города  $A$  в город  $B$  ведет 6 дорог, а из города  $B$  в город  $V$  – 4 дороги. Из города  $A$  в город  $\Gamma$  – 2 дороги, и из города  $\Gamma$  в город  $V$  – тоже 2 дороги. Сколькими способами можно проехать от  $A$  до  $V$ ?

*Решение.*

Из города  $A$  в город  $V$  можно попасть либо через город  $B$ , либо через город  $\Gamma$ . По правилу произведения через город  $B$  можно проехать  $6 \cdot 4 = 24$  способами, через город  $\Gamma$  –  $2 \cdot 2 = 4$  способами. Тогда из города  $A$  в город  $V$  можно попасть  $24 + 4 = 28$  способами.

Часто удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. В этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Это утверждение называют правилом суммы.

*Если некоторый объект  $A$  можно выбрать  $t$  способами, а другой объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор «либо  $A$ , либо  $B$ » можно осуществить  $t+n$  способами.*

При использовании правила суммы необходимо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта  $A$  не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта  $B$ .

В рассмотренной выше задаче число выборов после каждого шага зависит от того, какие элементы были выбраны на предыдущих шагах. Рассмотрим пример ещё одной такой задачи.

### Задача 2.4.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая по правилам игры комбинация?

*Решение.*

Шахматное поле имеет 64 клетки, поэтому белого короля можно поставить 64 способами. Как известно, король бьет клетки, расположенные непосредственно рядом с ним. Таким образом, если король находится в углу, то под боем находятся 3 клетки, если у стены, то – 5, если в центре, то – 8. Очевидно, что ставить черного короля нельзя в ту же клетку, где находится белый король, и в клетку, которая находится под боем. Так как существует 4 способа поставить короля в угол, 24 способа – у стены и 36 способов – в центре поля, то ответ на вопрос задачи вычисляется следующим образом:  $4 \cdot (64 - 4) + 24 \cdot (64 - 6) + 36 \cdot (64 - 9) = 3612$ .

Рассмотрим теперь вопрос, как вычислить количество способов выбора объекта «либо  $A$ , либо  $B$ », если известно, что некоторые из способов выбора объекта  $A$  совпадают с некоторыми способами выбора объекта  $B$ .

### 2.3. Формула включения и исключения

#### Задача 2.5.

Из-за различия программ в школах Ярославской области студенты первого курса физико-математического факультета разделились на следующие группы: 47 человек знают алгоритмический язык, 35 – язык программирования Паскаль и 23 – оба языка программирования. Сколько человек на курсе знают хотя бы один язык программирования?

#### Решение.

Разобьем всех студентов на группы. Первую из них составят те, кто знает только алгоритмический язык, вторую – те, кто знает только Паскаль, третью – те, кто знает оба языка. четвертую – те, кто не знает ни одного.

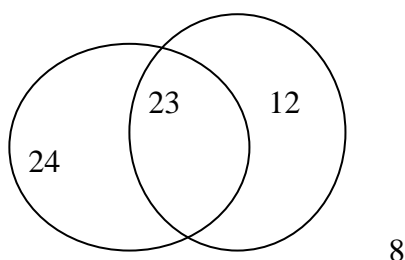


Рис. 2.1

Количество студентов, знающих хотя бы один язык программирования, можно записать в виде

$$59=23+24+12=23+(47-23)+(35-23)=47+35-23.$$

Таким образом, к числу студентов, знающих алгоритмический язык, необходимо прибавить число знающих язык Паскаль. При этом некоторые студенты попадают в оба списка и оказываются «прибавленными дважды». Это как раз те, которые знают оба языка программирования. Вычитая их число, получаем число студентов, знающих хотя бы один язык.

Запишем формулу в общем виде.

Обозначим через  $a_1$  свойство студента знать алгоритмический язык, через  $a_2$  – свойство студента знать Паскаль, через  $N(a_1)$  – количество студентов, знающих алгоритмический язык, через  $N(a_2)$  – количество студентов, знающих Паскаль. Тогда

$$N(a_1 \text{ или } a_2) = N(a_1) + N(a_2) - N(a_1 \text{ и } a_2).$$

Эту формулу называют формулой включения и исключения.

#### Задача 2.6.

Теперь усложним задачу. Пусть 47 студентов знают алгоритмический язык, 35 – язык Паскаль, 23 – Паскаль и алгоритмический язык, 20 – знают Бейсик, 12 – алгоритмический язык и Бейсик, 11 – Паскаль и Бейсик, 5 – все три языка. Вопрос тот же: Сколько человек на курсе знают хотя бы один язык программирования?

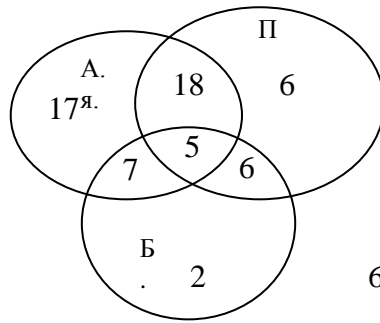


Рис.2.2

*Решение.*

Решая эту задачу аналогично предыдущей, получим:  $47+35+20-23-12-11+5=61$ .

Используя обозначения, предложенные выше, получаем следующую формулу для трех свойств:

$N(a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } a_3) = N(a_1)+N(a_2)+N(a_3)-N(a_1 \text{ и } a_2)-N(a_1 \text{ и } a_3)-N(a_2 \text{ и } a_3)+N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_3)$ .

### **Общий вид формулы включения и исключения**

Пусть имеется  $n$  предметов, некоторые из которых обладают свойствами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими свойствами одновременно.

Обозначим  $N(a_i \text{ или } a_j \text{ или } \dots \text{ или } a_k)$  количество предметов, обладающих хотя бы одним из свойств  $a_i, a_j, \dots, a_k$ .

Для того чтобы определить количество предметов, обладающих хотя бы одним из свойств  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , используют формулу:

$N(a_1 \text{ или } a_2 \text{ или } \dots \text{ или } a_n) = N(a_1) + N(a_2) + \dots + N(a_n) - N(a_1 \text{ и } a_2) - N(a_1 \text{ и } a_3) - \dots - N(a_1 \text{ и } a_n) - \dots - N(a_{n-1} \text{ и } a_n) + N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } a_3) + \dots + N(a_{n-2} \text{ и } a_{n-1} \text{ и } a_n) + \dots + (-1)^{n-1} N(a_1 \text{ и } a_2 \text{ и } \dots \text{ и } a_n)$ .

*Задача 2.7.*

Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 – леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 – шоколад и леденцы, 348 – конфеты и леденцы, а 297 – все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

*Решение.*

Обозначим через  $A$  свойство опрошенного любить шоколад, через  $B$  – свойство опрошенного любить конфеты, через  $C$  – свойство опрошенного любить леденцы.

По условию задачи  $N(A)=811$ ,  $N(B)=752$ ,  $N(C)=418$ ,  $N(A \text{ и } B)=570$ ,  $N(A \text{ и } C)=356$ ,  $N(B \text{ и } C)=348$ ,  $N(A \text{ и } B \text{ и } C)=297$ .

Подсчитаем количество опрошенных людей, которые любят хотя бы один вид сладостей. Воспользуемся формулой включения и исключения.

$N(A \text{ или } B \text{ или } C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \text{ и } B) - N(A \text{ и } C) - N(B \text{ и } C) + N(A \text{ и } B \text{ и } C) = 811 + 752 + 418 - 570 - 356 - 348 + 297 = 1004$ .

Опрошено было всего 1000 человек, следовательно, в предложенной информации содержатся ошибки.

## 2.4. Размещения с повторениями

Конечно, при решении комбинаторных задач можно использовать только приведенные выше правила, но большинство задач являются стандартными, для их решения существуют готовые формулы.

*Задача 2.8.*

Каково число последовательностей длины  $n$ , состоящих из 0 и 1?

*Решение.*

Заметим, что последовательность длины  $n$  можно получить из последовательности длины  $n - 1$ , дописывая в конец последовательности либо 1, либо 0. Значит, из каждой последовательности длины  $n - 1$  получается две последовательности длины  $n$ . Ответ на вопрос задачи –  $2^n$ .

Данная задача относится к классу задач о размещении с повторениями.

**Размещениями с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  называются всевозможные комбинации по  $k$  элементов, составленные из элементов данных  $n$  видов. При этом в комбинацию могут входить и предметы одного вида, а две комбинации считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них элементов, или порядком этих элементов.

Количество размещений с повторениями обозначается  $\bar{A}_n^k$  и равно  $n^k$ .

*Задача 2.9.*

Для того чтобы открыть камеру хранения, используется комбинация из 4 цифр (от 0 до 9), набираемая на 4 колесиках. Сколько различных комбинаций существует?

*Решение.*

Из условия задачи следует, что необходимо составить всевозможные комбинации по 4 элемента из данных 10. По формуле размещений с повторением получаем:  $\bar{A}_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$  вариантов.

*Задача 2.10.*

Сколько в  $n$ -ичной системе счисления натуральных чисел, записываемых ровно  $k$  знаками?

*Решение.*

Если допустить записи чисел, начинающиеся с нуля, то каждое  $k$ -значное число в  $n$ -ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из  $k$  цифр, причем цифры бывают  $n$  видов. Получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно  $n^k$ .

Но натуральные числа не могут начинаться с нуля. Поэтому из полученного значения  $n^k$  необходимо вычесть количество чисел, запись которых начинается с нуля. Если отбросить от этих чисел первую цифру – ноль, то получим  $(k-1)$ -значное число (быть может, начинающиеся с нуля). Таких чисел по формуле для вычисления количества размещений с повторениями существует  $n^{k-1}$ . Значит, общее количество  $k$ -значных чисел в  $n$ -ичной системе счисления равно  $n^k - n^{k-1} = n^k(n-1)$ .

## Размещения без повторений

*Задача 2.11.* Как изменится решение задачи о камере хранения, если известно, что цифры, набираемые на колесиках, различны?

*Решение.*

Вариантов выбора первой цифры 10 (от 0 до 9). Так как повторения быть не может, то вариантов выбора второй цифры всего 9. Аналогично для выбора третьей цифры остается 8 вариантов, для выбора четвертой – 7. По правилу произведения получаем, что всего комбинаций, в которых все числа различны,  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\ 040$ .

Данная задача относится к классу задач о размещении без повторений.

**Размещениями без повторений из  $n$  элементов по  $k$  называются всевозможные комбинации по  $k$  элементов, составленные из элементов данных  $n$  видов. При этом две комбинации считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.**

Количество размещений без повторений обозначают  $A_n^k$ . Общее правило вычисления количества размещений:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

*Задача 2.12.*

В первенстве России по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?

*Решение.*

Переформулируем задачу: Сколько существует комбинаций из 17 элементов по 3, если важны порядок элементов в комбинации, состав элементов и в комбинацию не могут входить элементы одного типа. (Повторения здесь быть не может – одна и та же команда не может получить и золотую и серебряную медаль.)

Эта задача относится к задачам на размещения без повторения. По формуле получаем: медали могут распределиться  $A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$  способами.

*Задача 2.13.*

Автомобильные номера некоторой страны состоят из 3 букв (все буквы различны) и четырех цифр (цифры могут повторяться). Сколько максимально машин может быть в этой стране, если в её алфавите 26 букв?

*Решение.*

Число комбинаций по 3 буквы из данных 26, при условии, что буквы не могут повторяться, определим с помощью формулы для вычисления количества размещений без повторений:  $A_{26}^3 = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\ 600$ .

Число комбинаций по 4 цифры из данных 10, если в комбинацию могут входить одинаковые цифры, найдем с помощью формулы для вычисления количества размещений с повторениями:  $\bar{A}_{10}^4 = 10^4$ .

Тогда по правилу произведения различных автомобильных номеров –  
 $A_{26}^3 \cdot \bar{A}_{10}^4 = 15600 \cdot 10^4 = 156 \cdot 10^6$ .

## 2.5. Перестановки

При составлении размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все  $n$  элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют перестановками из  $n$  элементов или  $n$ -перестановками.

**Перестановками из  $n$  элементов** называют всевозможные комбинации из  $n$  элементов, каждая из которых содержит все элементы по одному разу. Комбинации отличаются друг от друга лишь порядком элементов.

Число  $n$ -перестановок обозначают через  $P_n$ . Общее правило вычисления количества перестановок:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Рассмотрим несколько задач, решаемых с применением этой формулы.

*Задача 2.14.*

Сколькими способами можно расположить на книжной полке 6 томов детской энциклопедии?

*Решение*

Так как на полке располагаем все 6 томов, то различные расположения отличаются только порядком, но не составом. По формуле перестановок имеем  $6! = 720$ .

*Задача 2.15.*

Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

*Решение.*

На каждой вертикали и горизонтали должно стоять по одной ладье. Введем обозначения: перестановка (13256487) означает, что на первой горизонтали ладья стоит в первом поле, на второй – в третьем, на третьем – во втором и т.д. Таким образом, число искомых расположений равно количеству перестановок чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть  $P_8 = 8! = 40320$ .

*Задача 2.16.*

Сколько способов разбить 6 мужчин и 6 женщин на пары для танцев?

*Решение.*

Выстроим мужчин в одну линию в произвольном порядке. Пусть каждая женщина выбирает себе пару. Тогда количество способов разбиения на пары равно количеству способов переставить 6 различных предметов, то есть равно  $6!$ .

*Задача 2.17.*

Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

*Решение.*

Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы  $7!$  способов. Так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц, необходимо считать одинаковыми. Из каждой перестановки можно получить еще шесть новых путем вращения. Значит, число  $7!$  необходимо разделить на 7. Получаем  $7!:7=6!=720$  различных перестановок девушек в хороводе.

### Перестановки с повторениями

Рассмотрим, как изменится количество перестановок, если некоторые из переставляемых предметов одинаковы.

*Задача 2.18.*

Сколько слов можно получить, переставляя буквы слова «март»? Сколько слов можно получить, если переставлять буквы слова «мама»?

*Решение.*

Переставляя буквы слова «март», получим 24 различные перестановки, так как все переставляемые элементы различны.

Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок – некоторые перестановки совпадают друг с другом.

При перестановке букв слова «мама» имеем две пары одинаковых букв  $mm$  и  $aa$ . Сделаем их различными, дописав к одинаковым буквам различные индексы:  $m_1a_1m_2a_2$ . Рассмотрим все возможные перестановки:

$m_1a_1m_2a_2$	$m_1m_2a_1a_2$	$a_1a_2m_1m_2$	$m_1a_1m_2a_2$	$m_1a_1a_2m_2$	$a_1m_1m_2a_2$	$a_1m_1a_2m_2$
$m_2a_1m_1a_2$	$m_2m_1a_1a_2$	$a_2a_1m_1m_2$	$m_2a_1m_1a_2$	$m_2a_1a_2m_1$	$a_1m_2m_1a_2$	$a_1m_2a_2m_1$
$m_1a_2m_2a_1$	$m_1m_2a_2a_1$	$a_1a_2m_2m_1$	$m_1a_2m_2a_1$	$m_1a_2a_1m_2$	$a_2m_1m_2a_1$	$a_2m_1a_1m_2$
$m_2a_2m_1a_1$	$m_2m_1a_1a_1$	$a_2a_1m_2m_1$	$m_2a_2m_1a_1$	$m_2a_2a_1m_1$	$a_2m_2m_1a_1$	$a_2m_2a_1m_1$

Получили 24 различные перестановки, которые разбиваются на четверки одинаковых слов, если убрать индексы при буквах «м» и «а». Значит, всего различных перестановок  $\frac{24}{4} = 6$ .

Общая задача формулируется следующим образом:

**Перестановками с повторениями** из  $n_1$  элементов первого типа,  $n_2$  элементов второго типа, ...,  $n_k$  элементов  $k$ -го типа называются всевозможные комбинации из этих элементов, каждая из которых содержит  $n_i$  элементов  $i$ -го вида. Комбинации отличаются друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок с повторениями обозначают через  $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ . Общее правило вычисления количества перестановок с повторениями:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}.$$

*Задача 2.19.*

Сколькими способами можно поставить в ряд 3 красных, 4 синих и 5 зеленых кубиков?

*Решение.*

По формуле перестановок с повторениями получаем:  $P(3, 4, 5) = \frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} = 27\,720$ .

*Задача 2.20.*

Слово – любая конечная последовательность букв русского алфавита. Сколько различных слов можно составить из слова КАСАТЕЛЬНАЯ, если необходимо использовать все буквы?

*Решение.*

В слове имеется 3 буквы А и еще 8 различных букв. По формуле перестановок с повторениями получаем:  $P(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3) = \frac{11!}{3!} = 6\,652\,800$ .

## 2.6. Сочетания

До сих пор при составлении комбинаций из элементов различных типов нас интересовал порядок расположения элементов. Но некоторый класс задач приводит к составлению комбинаций, в которых порядок элементов совершенно не важен.

*Задача 2.21.*

Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов?

*Решение.*

Это задача на размещения без повторений. Ответ:  $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  способов составить флаг.

*Задача 2.22.*

Сколькими способами можно выбрать три краски из имеющихся пяти?

*Решение.*

В данном случае порядок выбора красок не важен. Поэтому количество способов выбора красок, полученное в предыдущей задаче, необходимо разделить на  $3!$  – количество способов переставить выбранные краски. Ответ:  $\frac{A_5^3}{3!} = 10$ .

Эта задача относится к классу задач о сочетаниях.

**Сочетаниями из  $n$  элементов по  $k$**  называют всевозможные комбинации по  $k$  элементов, составленные из данных  $n$  элементов. Комбинации отличаются друг от друга составом, но не порядком элементов.

Количество сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  обозначают  $C_n^k$ .

Формула для вычисления числа сочетаний получается из формулы для вычисления количества размещений. Составим сначала все  $k$ -сочетания из  $n$  элементов, а потом переставим входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все  $k$ -размещения из  $n$  элементов, причем каждое только по одному разу. Элементы каждого  $k$ -сочетания можно



переставить  $k!$  способами, а число этих сочетаний равно  $C_n^k$ . Значит, справедлива формула  $k!C_n^k = A_n^k$ . Получаем  $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

### Задача 2.23.

Два филателиста хотят обменяться марками. У одного для обмена есть 7 марок, у другого – 5. Сколькими способами они могут поменять две марки одного на две марки другого?

*Решение.*

Первый филателист должен выбрать 2 марки из 7. Он может это сделать  $C_7^2$  способами. Второй должен выбрать 2 марки из 5. Он может это сделать  $C_5^2$  способами. По правилу произведения получаем  $C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 210$  способов совершить обмен.

### Задача 2.24.

Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди них окажется ровно три туза?

*Решение.*

Необходимо выбрать трех тузов и семь «не тузов». Всего в колоде 4 туза. Поэтому выбрать из них 3 можно  $C_4^3$  способами. «Не тузов» в колоде 48. Выбрать из них 7 можно  $C_{48}^7$  способами. По правилу произведения получаем:  $C_4^3 \cdot C_{48}^7 = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{48!}{7!41!} = \frac{4 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 29\ 451\ 6288$  способов выбрать из колоды 10 карт так, что среди них будет ровно три туза.

### Свойства чисел $C_n^k$

Числа  $C_n^k$  обладают рядом замечательных свойств. Эти свойства можно доказывать по-разному. Можно прямо воспользоваться формулой  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Однако часто удается получить доказательство из комбинаторных соображений.

**1 свойство:**  $P(k, n-k) = C_n^k$

*Доказательство.*

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

**2 свойство – свойство симметричности**  $C_n^k = C_n^{n-k}$

*Доказательство.*

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

**3 свойство – основное свойство**  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

**4 свойство:**  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$

**5 свойство:**  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

*Задача 2.25.*

На окружности отмечено 11 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в отмеченных точках?

*Решение.*

*Первый способ.* Существует  $C_{11}^3$  треугольников с вершинами в отмеченных точках,  $C_{11}^4$  – четырехугольников,  $C_{11}^5$  – пятиугольников, ...,  $C_{11}^{11}$  – одиннадцатиугольников. Таким образом, по правилу суммы всего многоугольников  $C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5 + \dots + C_{11}^{11}$ . Из четвертого свойства следует, что это выражение равно  $2^{11} - C_{11}^1 - C_{11}^2 = 1982$ .

*Второй способ.* Любая из одиннадцати точек либо является вершиной рассматриваемого многоугольника, либо не является. Всего вариантов  $2^{11}$ . Но одна или две точки не могут составлять многоугольник. Остается  $2^{11} - C_{11}^1 - C_{11}^2$  вариантов многоугольников с вершинами в отмеченных точках.

**Сочетания с повторениями.**

*Задача 2.26.*

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

*Решение.*

Эта задача не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором укладывают пирожные в коробку, несуществен. Поэтому она ближе к задачам на сочетания. Но от задач на сочетания она отличается тем, что в комбинации могут быть повторяющиеся элементы. Такие задачи называют задачами на *сочетания с повторениями*.

Чтобы решить задачу, поступим следующим образом. Зашифруем каждую покупку с помощью нулей и единиц. Сначала напишем столько единиц, сколько куплено наполеонов. Потом, чтобы отделить наполеоны от эклеров, напишем нуль, затем – столько единиц, сколько куплено эклеров, и т. д. Например, если куплено 3 наполеона, 1 эклер, 2 песочных и 1 слоеное пирожное, то получим такую запись: 1110101101. Ясно, что разным покупкам соответствуют разные комбинации из 7 единиц и 3 нулей. Обратно, каждой комбинации 7 единиц и 3 нулей соответствует какая-то покупка.

Таким образом, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из 7 единиц и 3 нулей. А это число равно  $P(7,3)=120$ .

К тому же самому результату можно было прийти и другим путем, а именно: расположим в каждой покупке пирожные в таком порядке: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные, а потом перенумеруем их. Но при нумерации будем к номерам эклеров прибавлять 1, к номерам песочных – 2, к номерам слоеных – 3. К номерам наполеонов ничего прибавлять не будем. Например, пусть куплено 2 наполеона, 3 эклера, 1 песочное пирожное и 1 слоеное. Тогда эти пирожные нумеруются так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Ясно, что самый большой номер может

быть 10, самый маленький – 1, а кроме того, ни один из номеров не повторяется, причем они образуют возрастающую последовательность. Обратное, каждой возрастающей последовательности из 7 чисел соответствует некоторая покупка. Например, последовательность 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 соответствует покупке из 4 эклеров и 3 песочных пирожных. Чтобы убедиться в этом, надо отнять от заданных номеров числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Мы получим числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2. Но 1 мы прибавляли к номерам эклеров, а 2 – к номерам песочных.

Отсюда, общее число покупок равно числу возрастающих последовательностей из 7 чисел от 1 до 10. А число таких последовательностей равно  $C(10,7)=120$ .

**Сочетаниями с повторениями** из  $n$  элементов по  $k$  называют всевозможные комбинации, составленные из элементов  $n$  видов по  $k$  элементов в каждой. Комбинации считаются различными, если они отличаются составом, но не порядком входящих в них элементов. В комбинацию могут входить элементы одного вида.

Количество сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  обозначают  $\bar{C}_n^k$ .  
Общее правило вычисления количества сочетаний с повторениями:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

*Задача 2.27.*

Сколько существует различных бросаний двух одинаковых кубиков?

*Решение.*

Переформулируем задачу. Всего при подбрасывании одного кубика возможны шесть ситуаций – имеем предметы шести различных типов. Подбрасывают два кубика, следовательно, из данных шести типов предметов необходимо выбрать два, причем нас не интересует порядок выбора и допускается выбор одинаковых предметов. Таким образом, это задача на сочетания с повторением. По формуле для вычисления количества сочетаний с повторением имеем  $\bar{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$  различных бросаний двух одинаковых кубиков.

### 3. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

#### 3.1. Понятие множества

В дальнейшем мы будем различать следующие лексикологические понятия: *словоупотребление*, *форма слова (словоформа)*, *слово*, а также *исходная форма слова*. Под *словоупотреблением* понимается цепочка букв, заключенная между двумя пробелами в тексте и имеющая одно значение (омонимические словоупотребления рассматриваются как различные). Полностью совпадающие словоупотребления представляют одну *словоформу*. Слово выступает как некоторый класс (сумма) семантически и грамматически связанных между собой словоформ. Словоупотребление является единицей текста, слово – единицей двуязычного, толкового, энциклопедического и т. д. словаря. В этих словарях

слово представлено в так называемой *исходной форме*, в качества которой в русском языке выступает обычно именительный падеж единственного числа – для именных форм и инфинитив – для глагольных форм. Что же касается словоформы, то она используется обычно в качестве единицы частотного словаря.

Одно из основных понятий современной математики – понятие **множества**. Оно является первичным, т. е. не поддается определению через другие, более простые понятия. С понятием множества мы встречаемся довольно часто: буквы русского алфавита образуют множество, то же можно сказать о словоупотреблениях, содержащихся в данном предложении, на данной странице и т. д.

Приведенные примеры обладают одним существенным свойством: все эти множества состоят из определенного конечного числа объектов, которые мы будем называть **элементами множества**. При этом каждый из объектов данного вида либо принадлежит, либо не принадлежит рассматриваемому множеству. Так, например, буква *ф* вне всякого сомнения принадлежит множеству букв, образующих русский алфавит, в то время как буква *f* этому множеству не принадлежит.

Множества, включающие только такие объекты, принадлежность или непринадлежность которых к тому или иному множеству не вызывает сомнения, называются **четкими множествами**. Поскольку каждый рассматриваемый объект либо принадлежит, либо не принадлежит к рассматриваемому четкому множеству, эти множества всегда имеют ясно очерченные границы. Четким множествам противопоставлены **нечеткие** или «лингвистические» **множества**, включающие такие объекты, которые могут быть отнесены к тому или иному множеству лишь с определенной степенью достоверности.

Понятие нечеткого множества можно проиллюстрировать на примере семантических полей прилагательных *младенческий, детский, отроческий, юношеский, молодой, среднего возраста, старый*. Чтобы определить границы семантических полей указанных слов и словосочетаний, произведем следующий эксперимент. Предложим большой группе испытуемых – носителей русского языка отнести к той или иной возрастной группе мужчин различного возраста. При этом выясняется, что интервал от 10 до 14 лет одними испытуемыми будет квалифицироваться как детский, а другими – как отроческий возраст. Аналогичным образом период от 17 до 23 лет может считаться либо как юношеский, либо как относящийся к молодому возрасту. Таким образом, каждое из рассмотренных семантических полей представляет собой нечеткое подмножество с размытыми краями. Объекты, попадающие на эти размытые края, относятся к указанным множествам лишь с известной долей достоверности. Так, например, двадцатилетний мужчина может быть с достоверностью 50% отнесен к множеству юношей, и с той же достоверностью – к множеству молодых людей.

Аппарат нечетких множеств может применяться для описания процессов мышления, лингвистических явлений и вообще для моделирования человеческого поведения, при котором допускаются частичные истины, а строгий математический формализм не является категорически необходимым.

Множества, которые состоят из конечного числа элементов, называются

**конечными множествами.** К числу конечных множеств относится также и *пустое множество*, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента. Введение понятия пустого множества связано с тем, что, определяя тем или иным способом множество, мы не можем знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, множество двухбуквенных комбинаций *чы, бй, оъ*, можно считать пустым, если иметь в виду только русские тексты, написанные на литературном языке и не содержащие опечаток.

Лингвистика чаще всего имеет дело с конечными множествами объектов. Однако приходится рассматривать и **бесконечные множества**. Например, бесконечным является множество всех словоупотреблений в текстах данного языка при условии, что этот язык непрерывно порождает и будет порождать новые тексты без какого-либо ограничения во времени.

### 3.2. Способы задания множества

Произвольные множества будем обозначать прописными, а элементы множества – строчными буквами латинского алфавита, пустое множество – символом  $\emptyset$ .

Существуют два различных способа задания множества. Можно дать полный перечень элементов этого множества. Этот способ называется **перечислением множества**. Элементы перечисляемого множества заключают обычно в фигурные скобки. Например, множество  $A$ , состоящее из букв русского алфавита, вместе с пробелом (его обозначают знаком  $\Delta$ ) запишется так:  $A = \{a, б, в, \dots, ю, я, \Delta\}$ .

Другой способ состоит в том, что задается свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий рассматриваемому множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий. Этот способ называют **описанием множества**, а свойство, определяющее множество, – **характеристическим**.

При описании множеств используются различные символы, операции. Если  $A$  есть некоторое множество, а  $x$  – входящий в него объект, то символическая запись  $x \in A$  означает, что  $x$  является элементом множества  $A$ ; при этом говорят: « $x$  входит в  $A$ », « $x$  принадлежит  $A$ ». Если  $x$  не принадлежит множеству  $A$ , то пишут  $x \notin A$ . Пусть, например,  $A$  есть множество букв русского алфавита, тогда, обозначив букву  $d$  как элемент  $x$ , а букву  $d$  как элемент  $y$ , можно записать  $x \in A$ ,  $y \notin A$ . В том случае, когда речь идет о нечетком множестве, указывается степень достоверности, с которой  $x$  принадлежит множеству  $A$ . Это выражается записью  $P(x \in A)$ . Например, пусть  $A$  – множество юношей, а  $x$  обозначает двадцатилетнего мужчину; тогда, исходя из приведенных выше рассуждений, можно записать  $0,5(x \in A)$ .

### 3.3. Отношения между множествами

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, английский математик Джон Венн (1834 - 1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Леонард Эйлер (1707 - 1783) для этих целей использовал круги, при этом точки внутри круга считались элементами множества. Такие изображения сейчас называют диаграммами Эйлера - Венна.

Пусть даны два произвольных множества  $A$  и  $B$ , тогда возможны пять случаев отношений между ними:

1. Множества  $A$  и  $B$  не имеют общих элементов (рис. 3.1, а).
2. Множества  $A$  и  $B$  имеют общие элементы, но не все элементы множества  $A$  принадлежат множеству  $B$ , и не все элементы множества  $B$  принадлежат множеству  $A$ . В этом случае говорят о *пересечении* множеств  $A$  и  $B$  (рис. 3.1, б).
3. Все элементы множества  $B$  принадлежат множеству  $A$ , но не все элементы множества  $A$  принадлежат множеству  $B$ . В этом случае говорят о *включении* множества  $B$  во множество  $A$  (рис. 3.1, в).

*Определение:* Если имеются два множества  $A$  и  $B$ , причем каждый элемент множества  $B$  принадлежит множеству  $A$ , то множество  $B$  называется *подмножеством* множества  $A$ . Записывается это так:  $B \subset A$ .

Само множество  $A$  и пустое множество  $\emptyset$  называют *несобственными* подмножествами множества  $A$ . Все остальные подмножества называются *собственными*.

4. Все элементы множества  $A$  принадлежат множеству  $B$ , но не все элементы множества  $B$  принадлежат множеству  $A$ . В этом случае говорят о *включении* множества  $A$  во множество  $B$  ( $A \subset B$ ) (рис. 3.1, г).

5. Все элементы множества  $A$  принадлежат множеству  $B$  и все элементы множества  $B$  принадлежат множеству  $A$ . В этом случае говорят, что множества  $A$  и  $B$  равны (рис. 3.1, д).

*Определение:* а) Два множества  $A$  и  $B$  называются *равными* (или совпадающими), если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

б) Два множества  $A$  и  $B$  называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывается это так:  $A = B$ .

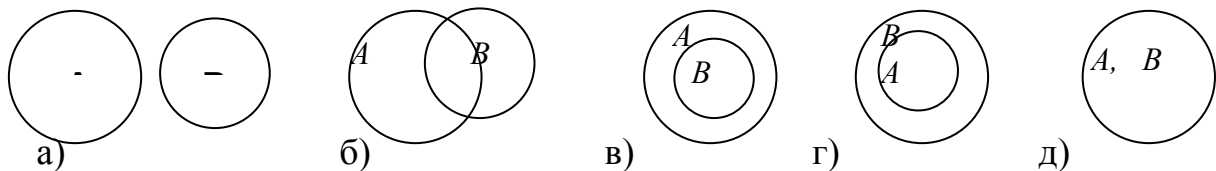


Рис. 3.1

*Определение:* Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется *универсальным*. Универсальное множество будем обозначать буквой  $U$ .

### 3.4. Основные операции над множествами

Основными операциями, осуществляемыми над множествами, являются *сложение (объединение)*, *умножение (пересечение)* и *вычитание*. Эти операции, как мы увидим дальше, не тождественны одноименным операциям, производимым над числами.

**Определение:** *Объединением* (или *суммой*) двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество, содержащее все такие и только такие элементы, которые являются элементами хотя бы одного из этих множеств. Объединение множеств  $A$  и  $B$  обозначают как  $A \cup B$ .

Это определение означает, что сложение множеств  $A$  и  $B$  есть объединение всех их элементов в одно множество  $A \cup B$ . Если одни и те же элементы содержатся в обоих множествах, то в объединение эти элементы входят только по одному разу.

Аналогично определяется объединение трёх и более множеств.

*Пересечением* (или *умножением*) двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и множеству  $B$  одновременно. Пересечение множеств  $A$  и  $B$  обозначают как  $A \cap B$ .

Аналогично определяется пересечение трёх и более множеств.

*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ . Разность множеств  $A$  и  $B$  обозначают как  $A \setminus B$ . Операция, при помощи которой находится разность множеств, называется *вычитанием*.

Если  $B \subset A$ , то разность  $A \setminus B$  называется *дополнением* множества  $B$  до множества  $A$ . Если множество  $B$  является подмножеством универсального множества  $U$ , то дополнение  $B$  до  $U$  обозначается  $\bar{B}$ , то есть  $\bar{B} = U \setminus B$ .

### 3.5. Свойства объединения и пересечения множеств

Из определений объединения и пересечения множеств вытекают свойства этих операций, представленные в виде равенств, справедливых для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

1.  $A \cup B = B \cup A$  – коммутативность объединения;
2.  $A \cap B = B \cap A$  – коммутативность пересечения;
3.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  – ассоциативность объединения;
4.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  – ассоциативность пересечения;
5.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  – дистрибутивность пересечения относительно объединения;
6.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  – дистрибутивность объединения относительно пересечения.

Законы поглощения:

1.  $A \cup A = A$
2.  $A \cap A = A$

3.  $A \cup \emptyset = A$
4.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
5.  $A \cup U = U$
6.  $A \cap U = A$

Следует заметить, что разность не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то есть  $A \setminus B \neq B \setminus A$  и  $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ . В этом легко убедиться, построив диаграммы Эйлера - Венна.

### 3.6. Разбиение множества на классы. Классификация

В процессе изучения предметов и явлений окружающего мира мы постоянно сталкиваемся с классификацией. Классификация широко используется в биологии, химии, математике, языке и многих других науках. Она облегчает процесс усвоения знаний.

Классификация в любой области человеческой деятельности связана с разбиением множества на подмножества (классы). Например, классификация частей речи, членов предложения, чисел, геометрических фигур и так далее.

Полученные подмножества должны обладать некоторыми свойствами:

- 1) они не должны быть пустыми;
- 2) не должны содержать общих элементов;
- 3) объединение всех подмножеств должно равняться самому множеству.

**Классификацией** или разбиением множества на классы называется представление этого множества в виде объединения непустых попарно не пересекающихся своих подмножеств.

Для примера рассмотрим классификацию с помощью двух свойств.

Пусть  $U$  – множество студентов лингвистического института РГПУ, свойство  $\alpha$  - «быть отличником», свойство  $\beta$  - «быть спортсменом». С помощью указанных свойств можно выделить следующие подмножества:

- $A$  – множество отличников;
- $\overline{A}$  – множество не отличников;
- $B$  – множество спортсменов;
- $\overline{B}$  – множество не спортсменов.

Множество  $U$  в этом случае оказывается разбитым на следующие четыре класса (подмножества):

- I** – множество отличников-спортсменов;
- II** – множество отличников - не спортсменов;
- III** – множество не отличников - спортсменов;
- IV** – множество не отличников - не спортсменов;

Можно доказать, что если  $n$  – число свойств, то максимальное число классов в разбиении равно  $2^n$ .

#### **Число элементов объединения и разности двух конечных множеств**

Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества. Число элементов множества  $A$  условимся обозначать символом  $m(A)$  и называть **численностью** множества  $A$ .

Определим численность объединения множеств  $A$  и  $B$ .



Если множества  $A$  и  $B$  не пересекаются (рис. 3.1, а), то  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ . Таким образом, численность объединения конечных непересекающихся множеств равна сумме численностей этих множеств.

Если множества  $A$  и  $B$  пересекаются (рис. 3.1, б), то в сумме  $m(A) + m(B)$  число элементов пересечения  $A \cap B$  содержится дважды: один раз в  $m(A)$ , а другой – в  $m(B)$ . Поэтому, чтобы найти численность объединения  $m(A \cup B)$ , нужно из указанной суммы вычесть  $m(A \cap B)$ . Таким образом:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Определим теперь численность разности множеств  $A$  и  $B$ .

Если множества  $A$  и  $B$  не пересекаются (рис. 3.1, а), то  $A \setminus B = A$ , и поэтому  $m(A \setminus B) = m(A)$ .

Если множества  $A$  и  $B$  пересекаются (рис. 3.1, б), то  $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$ .

Если  $B \subset A$  (рис. 3.1, в), то  $A \cap B = B$ , и, следовательно,  $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ .

#### 4. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Современный человек каждый день запоминает номера машин и телефонов, в магазине подсчитывает стоимость покупок, ведет семейный бюджет и т.д. Числа, цифры с нами везде.

Люди всегда считали и записывали числа, даже пять тысяч лет назад. Но записывали они их совершенно по-другому, по другим правилам. Но в любом случае число изображалось с помощью любого или нескольких символов, которые называются цифрами.

*Цифры* - это символы, участвующие в записи числа и составляющие некоторый алфавит.

Что же такое число? Первоначально число было привязано к тем предметам, которые пересчитывались. Но с появлением письменности число отделилось от предметов пересчета и появилось понятие натурального числа. Дробные числа появились в связи с тем, что человеку потребовалось что-то измерять и единица измерения (эталон) не всегда укладывалась целое число раз в измеряемой величине. Далее понятие числа развивалось в математике и сегодня считается фундаментальным понятием не только математики, но и информатики.

*Число* - это некоторая величина. Числа складываются из цифр по особым правилам. На разных этапах развития человечества, у разных народов эти правила были различны, и сегодня их называем системами счисления.

*Система счисления* - это способ записи чисел с помощью цифр.

а) Простая система счисления.

У первобытных людей не было даже чисел, они количество предметов отображали равным количеством каких-либо значков. Такими значками могли быть зарубки, черточки, точки, а также узелки на веревках.

Это самая простая система счисления. В этой системе счисления для записи чисел используется только одна цифра. Ее можно изобразить в виде квадрата

□, кружочка ○, или любой другой фигуры. Тогда числа будут записываться примерно так:

1	□
2	□□
3	□□□
4	□□□□
5	□□□□□ и т. д.

Но иногда такой системой счисления пользуются и современные люди, например, отмечая зарубками количество прошедших дней или карандашом отмечая черточками в тетради количество проданных товаров. Позже, для облегчения счета, эти значки стали группировать по три или по пять. Такая система записи чисел называется единичной (унарной), так как любое число в ней образуется путем повторения одного знака, символизирующего единицу.

Но это удобно, пока числа небольшие. Вы только представьте себе число 1 000, записанное с помощью кучки камушков, а 1 000 000? Неудобно?

И люди начали изобретать системы счисления.

б) Позиционные и непозиционные системы счисления.

Все системы счисления делятся на две большие группы: позиционные и непозиционные. В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных — не зависит.

Непозиционные системы счисления возникли раньше позиционных. Последние являются в свою очередь результатом длительного исторического развития непозиционных систем счисления.

**Позиционная система счисления.** Чтобы разобраться в этом, рассмотрим для примера нашу «арабскую» систему счисления. Например, число 3333 – три тысячи триста тридцать три. Здесь каждая цифра «3» в зависимости от того, в каком месте находится, обозначает свое число.

Первая тройка слева – это три тысячи, вторая – три сотни, третья – три десятка, четвертая – три единицы. В таких же системах значение каждой цифры зависит от ее положения (места, позиции) в записи числа.

**Непозиционные системы счисления.**

В римской системе счисления количественное значение цифры не зависит от ее положения в числе. Например, в римском числе XXX (30) цифра X встречается трижды и в каждом случае обозначает одну и ту же величину — число 10, три раза по 10 в сумме дают 30. В непозиционных же системах для представления числа используется сложение всех цифр, по-английски сложение – *add*.

в) Основание системы счисления.

Основание системы счисления – это число, на основе которого ведется счет. Например, если основание системы счисления равно десяти, то минимальная счетная группа этой системы счисления равна десяти, это значит, что, сосчитав какие-либо предметы до десяти, мы считаем снова с единицы, но при этом запоминаем число десятков. В нашей «арабской» системе основанием является число десять.

Есть системы счисления и с другим основанием. Это такие системы счисления, как пятеричная, двенадцатеричная, двадцатеричная, шестидесятеричная.

Если за основание принять другое число, то получим другую систему счисления: восьмеричную, если за основание принять число 8; троичную, если за основание принять число 3, и т.д. Наибольшее применение в вычислительной математике имеет двоичная система счисления. В ней всего две цифры: 0 и 1. Числа, записанные в двоичной системе счисления, удобно вводить в вычислительную электронную машину и производить над ними действия для решения различных довольно сложных задач.

Десятеричная и пятеричная система возникла от того факта, что на одной руке человека пять пальцев, на обеих руках 10 пальцев. Так проще считать. Если добавить пальцы и на ногах, то будет понятна и двадцатеричная система (рис. 4.1).



Рис. 4.1

Происхождение двенадцатеричной системы тоже связано со счетом на пальцах. Считали большой палец руки и фаланги остальных четырех пальцев (рис. 4.2).



Рис. 4.2

Шестидесятеричная система: на одной руке загибаем пальцы, пока не получим, что отсчитано, пять штук, а на другой руке прикосновением большого пальца к суставам остальных четырех указываем количество этих пятерок.

Действия над числами в любой системе счисления выполняются аналогично действиям над числами в десятичной системе счисления. Надо только помнить, что если в каком-то разряде получается число единиц этого разряда, равное основанию системы счисления, то это будет единица следующего разряда. Аналогично одна единица старшего разряда при переводе в младший разряд равна числу единиц в основании системы счисления.

#### 4.1. Представление чисел в различных системах счисления

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с использованием особых знаковых систем, которые называются системами счисления. Алфавит системы счисления состоит из символов, которые называются цифрами.

**Система счисления** - это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

##### **Непозиционные системы счисления.**

Примером непозиционной системы, которая сохранилась до наших дней, может служить римская система счисления, которая начала применяться более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме. В основе римской системы счисления лежат знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для числа 10, а для обозначения чисел 100, 500 и 1000 используются латинские буквы C, D и M.

В ней количественный эквивалент каждой цифры, входящей в запись данного числа, не зависит от места (позиции) этой цифры в ряду других цифр. В ней для записи различных целых чисел используются символы I, V, X, L, C, D, M и т.д., обозначающие соответственно 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 и т.д. Например, запись MCMLXXXV означает число 1985.

Чтобы записать число в римской системе счисления, необходимо разложить его на сумму тысяч, полутысяч, сотен, полусотен, десятков, пятков, единиц. Например, десятичное число 28 представляется следующим образом:

$XXVIII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1$  (два десятка, пяток, три единицы).

При записи чисел в римской системе счисления применяется правило: каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него, в остальных случаях знаки складываются. Например, римское число IX обозначает 9 ( $-1 + 10$ ), а XI обозначает 11 ( $10 + 1$ ). Число 99 имеет следующее представление в римской системе счисления:  $XCIX = -10 + 100 - 1 + 10$ .

**Позиционные системы счисления.** Каждая позиционная система счисления имеет определенный алфавит цифр и основание. Основание системы равно количеству цифр (знаков) в ее алфавите.

В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее позиции в числе. Позиция цифры в числе называется разрядом. Разряды числа возрастают справа налево, от младших разрядов к старшим, причем значения одинаковых цифр, стоящих в соседних разрядах числа, различаются на величину основания.

В настоящее время наиболее распространенными позиционными системами счисления являются десятичная и двоичная. Десятичная система счисления имеет алфавит цифр, который состоит из десяти всем известных так называемых арабских цифр  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Алфавит двоичной системы - две цифры  $\{0, 1\}$  (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1

**Десятичная система счисления.** В десятичной системе счисления цифра в крайней справа позиции обозначает единицы, цифра, смещенная на одну позицию влево, обозначает десятки, еще левее - сотни, затем тысячи и т. д.

Рассмотрим в качестве примера десятичное число 555. Цифра 5 встречается в числе трижды, причем самая правая обозначает пять единиц, вторая справа - пять десятков и, наконец, третья - пять сотен.

Выше десятичное число 555 было записано в привычной для нас свернутой форме. Мы настолько привыкли к такой форме записи, что уже не замечаем, как в уме умножаем цифры числа на различные степени числа 10, которое является основанием десятичной системы счисления.

В развернутой форме записи числа умножение цифр числа на основание производится в явной форме. Так, в развернутой форме запись числа 555 в десятичной системе будет выглядеть следующим образом:

$$555_{10} = 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Для записи десятичных дробей используются разряды с отрицательными значениями степеней основания. Например, число 555,55 в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$555,55_{10} = 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Число в позиционной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания, в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

**Двоичная система счисления.** Числа в двоичной системе в развернутой форме записываются в виде суммы ряда степеней основания 2 с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры 0 или 1.

Число в свернутой форме:  $A_2 = 101,012$ .

Развернутая запись двоичного числа выглядит следующим образом:

$$A_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}.$$

Первая позиционная система счисления была придумана еще в древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была шестидесятеричной, т. е. в ней использовалось шестьдесят цифр! Интересно, что до сих пор при измерении времени мы используем основание 60 (в 1 минуте содержится 60 секунд, а в 1 часе - 60 минут).

В XIX веке довольно широкое распространение получила двенадцатеричная система счисления. До сих пор мы часто употребляем дюжину (число 12): в сутках две дюжины часов, круг содержит тридцать дюжин градусов и т. д.

В информатике широко используются восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления.

В **восьмеричной системе** основание равно 8 и алфавит состоит из восьми цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Запишем восьмеричное число 77 в свернутой и развернутой формах и переведем его в десятичную систему счисления:

$$77_8 = 7 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 63_{10}.$$

В **шестнадцатеричной системе** основание равно 16 и алфавит состоит из шестнадцати цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}, причем первые десять цифр имеют общепринятое обозначение, а для записи остальных цифр {10, 11, 12, 13, 14, 15} используются первые шесть букв латинского алфавита. Запишем шестнадцатеричное число в свернутой и развернутой формах и переведем его в десятичную систему счисления:

$$ABCDEF_{16} = A \cdot 16^5 + B \cdot 16^4 + C \cdot 16^3 + D \cdot 16^2 + E \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 = 10 \times 16^5 + 11 \cdot 16^4 + 12 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 11259375_{10}.$$

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D

14	1110	16	E
15	1111	17	F

## 5. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Утверждения подразделяются на общие и частные. Приведем пример общего утверждения: *во всяком параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам.*

Соответствующим примером частного утверждения является следующее: *в параллелограмме ABCD диагонали в точке пересечения делятся пополам.*

Переход от общих утверждений к частным называется *дедукцией*. Рассмотрим пример:

Все числа, оканчивающиеся нулем, делятся на 5. (1)

140 – число, оканчивающееся на ноль. (2)

140 делится на 5. (3)

Из общего утверждения (1) при помощи утверждения (2) получено частное утверждение (3).

Переход от частных утверждений к общим называется *индукцией*. Индукция может привести как к верным, так и к неверным выводам. Разберем два примера:

140 делится на 5. (1)

Все числа, оканчивающиеся нулем, делятся на 5. (2)

Из частного утверждения (1) получено общее утверждение (2). Утверждение (2) верно.

140 делится на 5. (1)

Все трехзначные числа делятся на 5. (2)

Из частного утверждения (1) получено общее утверждение (2). Утверждение (2) неверно.

Спрашивается, как пользоваться в математике индукцией, чтобы получать только верные ответы? Ответ на этот вопрос и дается в этой статье.

Если имеется утверждение, справедливое в нескольких частных случаях, а все частные случаи рассмотреть невозможно. Как же узнать, справедливо ли вообще это утверждение?

Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого *методом математической индукции* (полной индукции, совершенной индукции).

В основе этого метода лежит *принцип математической индукции*, заключающийся в следующем:

утверждение справедливо для всякого натурального  $n$ , если:

1) оно справедливо для  $n = 1$

2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального  $n = k$  следует его справедливость для  $n = k+1$ .

Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называется доказательством методом математической индукции. Такое доказательство необходимо должно состоять из двух частей, из доказательства двух самостоятельных теорем:

**Т е о р е м а 1.** Утверждение справедливо для  $n = 1$ .

**Т е о р е м а 2.** Утверждение справедливо для  $n = k+1$ , если оно справедливо для  $n = k$ , где  $k$  – какое-либо произвольное натуральное число.

Если обе эти теоремы доказаны, то на основании принципа математической индукции утверждение справедливо для всякого натурального  $n$ .

**Пример 5.1.** Вычислить сумму

$$S_n = 1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + \dots + 1/n(n+1).$$

Мы знаем, что

$$S_1 = 1/2; \quad S_2 = 2/3; \quad S_3 = 3/4; \quad S_4 = 4/5.$$

Рассмотрение сумм  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  позволяет высказать гипотезу, что  $S_n = n/n+1$ , при всяком натуральном  $n$ . Для проверки гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

**Т е о р е м а 1.** Для  $n = 1$  гипотеза верна, так как  $S_1 = 1/2$ .

**Т е о р е м а 2.** Предположим, что гипотеза верна и для  $n = k$ , т.е. что

$$S_k = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \dots + \frac{1}{k} (k+1) = \frac{k}{(k+1)},$$

где  $k$  – некоторое натуральное число. Докажем, что тогда гипотеза обязана быть верной и для  $n = k+1$ , т.е. что

$$S_{k+1} = S_k + 1/(k+1)(k+2);$$

Следовательно, по условию теоремы,

$$S_{k+1} = k/(k+1) + 1/(k+1)(k+2) = (k^2 + 2k + 1)/(k+1)(k+2) = (k+1)/(k+2).$$

Обе теоремы доказаны. Теперь на основании принципа математической индукции мы утверждаем, что

$$S_n = n/n+1.$$

**З а м е ч а н и е.** Необходимо подчеркнуть, что доказательство методом математической индукции, безусловно, требует доказательства *обеих теорем 1 и 2*.

**Пример 5.2. Теорема.** Всякое натуральное число равно следующему за ним натуральному числу.

Доказательство проведем методом математической индукции. Предположим, что

$$k = k + 1 \tag{1}$$

Докажем, что

$$k + 1 = k + 2 \tag{2}$$

Действительно, прибавив к каждой части равенства (1) по 1, получим равенство (2). Выходит, что если утверждение справедливо для  $n = k$ , то оно справедливо и для  $n = k+1$ . Теорема доказана.

**С л е д с т в и е.** Все натуральные числа равны.



Где же здесь ошибка? Ошибка заключается в том, что первая теорема, необходимая для применения принципа математической индукции, не доказана и не верна, а доказана только вторая теорема.

Теоремы 1 и 2 имеют свое особое значение. Теорема 1, так сказать, создает базу для проведения индукции. Теорема 2 дает право неограниченного автоматического расширения этой базы, право перехода от данного частного случая к следующему, от  $n$  к  $n+1$ .

Если не доказана теорема 1, а доказана теорема 2, то, следовательно, не создана база для проведения индукции, и тогда бессмысленно применять теорему 2, так как и расширять-то, собственно, нечего.

Если не доказана теорема 2, а доказана только теорема 1, то, хотя база для проведения индукции и создана, право расширения этой базы отсутствует.

Для того чтобы научиться применять метод математической индукции, надо рассмотреть достаточное количество задач.

Чтобы не повторять без конца слова «Теорема 1» и «Теорема 2», мы условимся в дальнейшем пометить первую и вторую части доказательства по индукции знаками  $1^\circ$  и  $2^\circ$ .

### 5.1. Доказательства тождеств: задачи арифметического характера

**Пример 5.3.** Выпишем в порядке возрастания положительные нечетные числа  $1, 3, 5, 7, \dots$ . Обозначим первое из них  $u_1$ , второе  $u_2$ , третье  $u_3$  и т. д., т. е.

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, u_4 = 7, \dots$$

Поставим перед собой такую задачу: составить формулу, выражающую нечетное число  $u_n$  через его номер  $n$ .

*Решение:* Первое нечетное число  $u_1$  можно записать так:

$$u_1 = 2 \cdot 1 - 1; \tag{1}$$

второе нечетное число можно записать так:

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1; \tag{2}$$

третье нечетное число можно записать так:

$$u_3 = 2 \cdot 3 - 1. \tag{3}$$

Внимательно рассматривая равенства (1), (2), (3), можно высказать гипотезу, что для получения любого нечетного числа достаточно от удвоенного номера его отнять 1, т.е. для  $n$ -го нечетного числа имеем формулу

$$u_n = 2n - 1. \tag{4}$$

Докажем, что эта формула справедлива.

$1^\circ$ . Равенство (1) показывает, что для  $n = 1$  формула (4) справедлива.

$2^\circ$ . Предположим, что формула (4) справедливо для  $n = k$ , т.е.  $k$ -е нечетное число имеет вид

$$u_k = 2k - 1.$$

Докажем, что тогда формула (4) обязана быть справедливой и для  $(k+1)$ -го нечетного числа, т.е. что  $(k+1)$ -е нечетное число имеет вид

$$u_{k+1} = 2(k+1) - 1,$$

или, что все равно,

$$u_{k+1} = 2k + 1.$$

Для получения  $(k+1)$ -го нечетного числа достаточно к  $k$ -му нечетному числу прибавить 2, т.е.

$$u_{k+1} = u_k + 2.$$

Но, по условию,  $u_{k+1} = (2k-1)$ . Значит,

$$u_{k+1} = (2k-1) + 2 = 2k + 1,$$

что и требовалось доказать.

**Ответ:**  $u_n = 2 \cdot n - 1$ .

**Пример 5.4.** Вычислить сумму первых  $n$  нечетных чисел.

*Решение.* Обозначим искомую сумму  $S_n$ , т.е.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots (2n - 1).$$

Для решения таких задач в математике существуют готовые формулы. Нам интересно решить эту задачу, не прибегая к готовой формуле, а пользуясь методом математической индукции. Для этого, прежде всего, надо построить гипотезу, т.е. просто постараться угадать ответ.

Придаем  $n$  последовательно значения 1, 2, 3, ... до тех пор, пока у нас не накопится достаточно материала, чтобы на основе его построить более или менее надежную гипотезу. После этого останется только эту гипотезу проверить методом математической индукции.

Имеем

$$\begin{array}{lll} S_1 = 1, & S_2 = 4, & S_3 = 9, \\ S_4 = 16, & S_5 = 25, & S_6 = 36. \end{array}$$

Теперь все зависит от наблюдательности решающего задачу, от его способности по частным результатам угадать общий.

Полагаем, что в данном случае легко заметить, что

$$S_1 = 1^2, \quad S_2 = 2^2, \quad S_3 = 3^2, \quad S_4 = 4^2.$$

На основе этого можно предположить, что вообще

$$S_n = n^2.$$

Докажем, что эта гипотеза справедлива.

1°. При  $n = 1$  сумма представляется одним слагаемым, равным 1. Выражение  $n^2$  при  $n = 1$  также равно 1. Значит, при  $n = 1$  гипотеза верна.

2°. Допустим, что гипотеза верна для  $n = k$ , т.е.  $S_k = k^2$ . Докажем, что тогда гипотеза должна быть верна и для  $n = k + 1$ , т.е.

$$S_{k+1} = (k + 1)^2.$$

Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + (2k + 1).$$

Но  $S_k = k^2$  и потому

$$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

Что и требовалось доказать

**Ответ:**  $S_n = n^2$ .

**Пример 5.5.** Доказать, что сумма квадратов  $n$  первых чисел натурального ряда равна  $n(n+1)(2n+1)/6$ .

*Решение.* Пусть

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

1°.  $S_2(1) = 1^2 = 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)/6$ .

2°. Предположим, что  
 $S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$ .

Тогда

$$S_2(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n(n+1)(2n+2)/6) + (n+1)^2$$

и окончательно

$$S_2(n+1) = (n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]/6.$$

## 5.2. Тригонометрические и алгебраические задачи

**Пример 5.6.** Доказать тождество

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\dots\cos(2^n\alpha) = \sin(2^{n+1}\alpha)/2^{n+1}\sin\alpha.$$

*Решение.*

1°. При  $n = 0$  тождество справедливо, так как

$$\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)/2\sin(\alpha).$$

Пусть тождество справедливо при  $n = k$ , т.е.

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\dots\cos(2^k\alpha) = \sin(2^{k+1}\alpha)/2^{k+1}\sin\alpha.$$

Тогда оно справедливо и при  $n = k + 1$ . Действительно,

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\dots\cos(2^k\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha) = \sin(2^{k+1}\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha)/2^{k+1}\sin\alpha = \sin(2^{k+2}\alpha)/2^{k+2}\sin\alpha.$$

**Пример 5.7.** Доказать, что  $A_k = \cos n\theta$ , если известно, что  $A_1 = \cos\theta$ ,  $A_2 = \cos 2\theta$  и для всякого натурального  $k > 2$  имеет место соотношение:

$$A_k = 2\cos\theta A_{k-1} - A_{k-2}.$$

*Решение.*

1°. Утверждение справедливо при  $n = 1$  и  $n = 2$ .

2°. Пусть

$$A_{k-2} = \cos(k-2)\theta,$$

$$A_{k-1} = \cos(k-1)\theta.$$

Тогда

$$A_k = 2\cos\theta\cos(k-1)\theta - \cos(k-2)\theta = \cos k\theta.$$

**Пример 5.8.** Доказать, что

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = [\sin(n+1)x/2][\sin(nx/2)]/\sin(x/2).$$

*Решение.*

1°. При  $n = 1$  утверждение справедливо.

2°. Пусть

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx = [\sin(k+1)x/2][\sin(kx/2)]/\sin(x/2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx + \sin(k+1)x &= [\sin(k+1)x/2][\sin(kx/2)]/\sin(x/2) + \sin(k+1)x \\ (k+1)x &= [\sin(k+1)x/2][\sin(kx/2)]/\sin(x/2) + 2[\sin((k+1)x/2)][\cos((k+1)x/2)] = \\ &= [\sin(k+2)x/2][\sin((k+1)x/2)]/\sin(x/2), \end{aligned}$$

ибо

$$2\cos((k+1)x/2)\sin(x/2) = \sin((k+2)x/2) - \sin kx/2.$$

### 5.3. Задачи на доказательство неравенств

**Пример 5.9.** Доказать, что при любом натуральном  $n > 1$   
 $1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/2n < 13/24$ .

*Решение.* Обозначим левую часть неравенства через  $S_n$ .

1°.  $S_2 = 7/12 = 14/24$ , следовательно, при  $n = 2$  неравенство справедливо.

2°. Пусть  $S_k > 13/24$  при некотором  $k$ . Докажем, что тогда и  $S_{k+1} > 13/24$ .

Имеем

$$S_k = 1/(k+1) + 1/(k+2) + \dots + 1/2k,$$

$$S_{k+1} = 1/(k+2) + 1/(k+3) + \dots + 1/2k + 1/(2k+1) + 1/(2k+2).$$

Сравнивая  $S_k$  и  $S_{k+1}$ , имеем

$$S_{k+1} - S_k = 1/(2k+1) + 1/(2k+2) + 1/(k+1),$$

т.е.

$$S_{k+1} - S_k = 1/2(k+1)(2k+1).$$

При любом натуральном  $k$  правая часть последнего неравенства положительна. Поэтому

$$S_{k+1} > S_k.$$

Но  $S_k > 13/24$ , значит, и  $S_{k+1} > 13/24$ .

**Пример 5.10.** Доказать, что  $(1+\alpha)^n > 1 + k\alpha$ , где  $\alpha > -1$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $n$  – натуральное число, большее 1.

*Решение.*

1°. При  $n = 2$  неравенство справедливо, так как  $+\alpha^2 > 0$ .

2°. Пусть неравенство справедливо при  $n = k$ , где  $k$  – некоторое натуральное число, т.е.

$$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha.$$

Покажем, что тогда неравенство справедливо и при  $n = k + 1$ , т.е.

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha.$$

Действительно, по условию,  $1+\alpha > 0$ , поэтому справедливо неравенство

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1 + k\alpha)(1 + \alpha),$$

полученное из неравенства умножением каждой его части на  $(1 + \alpha)$ .

Перепишем неравенство так:

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2.$$

Отбросив в правой части последнего неравенства положительное слагаемое  $k\alpha^2$ , получим справедливое неравенство.

## 6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМАМ

### 6.1. Комплексные числа

1. Вычислить:

1)  $(3 - 2i) + (5 + 3i)$ ;

2)  $(1 + 2i) - (3 - i)$ ;

3)  $3(2 - i) \cdot (1 - i)$ ;

4)  $(1 + 3i)(-7 + 2i)$ ;

5)  $(2 - i)^2$ ;

6)  $(1 + 2i)^3$ .

2. Найти решение уравнений ( $x, y \in \mathbb{R}$ ):

1)  $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$ ;

2)  $2x + (1 + i)(x + y) = 7 + i$ ;

3)  $(3 - y + x)(1 + i) + (x - y)(2 + i) = 6 - 3i$ .

3. Вычислить:

1) $i^{13}$ ;	2) $i^{65}$ ;	3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$ ;
4) $\frac{5}{1+2i}$ ;	5) $\frac{2i-3}{1+i}$ ;	6) $\frac{2+3i}{i}$ ;
7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i) + 1$ ;	8) $\frac{2+i}{2-i} - (3+4i) + \frac{4-i}{3+2i}$ ;	9) $(2-i)^2$ .

4. Найти  $z^{-1}$ , если:

1) $z = 7 - 12i$ ;	2) $z = 3 + 4i$ ;	3) $z = -3 + 7i$ ;	4) $z = i$ .
--------------------	-------------------	--------------------	--------------

5. Вычислить:

1) $(1 + i\sqrt{3})^3(1 - i)^7$ ;	2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$ ;	3) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$ .
-----------------------------------	--	---------------------------------

6. Доказать, что  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ;  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ;  $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$ .

7. Доказать, что если  $z = a + bi$ , то  $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$ .

8. Построить точки, соответствующие комплексным числам:

$-1$ ;  $i$ ;  $-\sqrt{2}$ ;  $-3i$ ;  $2 - 3i$ ;  $-4 - 2i$ ;  $3 + i$ ;  $-6 + 2i$ ;  $2 + 2i$ ;  $-2 + 2i$ ;  $-2 - 2i$ .

9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i$ , $z_2 = 3 - i$ ;	2) $z_1 = -3$ , $z_2 = 4i$ .
-------------------------------------	------------------------------

10. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел  $z = x + yi$ , для которых:

1) $x = 2$ ;	2) $1 \leq x \leq 3$ ;	3) $\text{Re } z = \text{Im } z$ ;	4) $\text{Im } z = 2\text{Re } z$ .
--------------	------------------------	------------------------------------	-------------------------------------

11. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1)  $z = 1 + i$ ; 2)  $z = \sqrt{3} - i$ ; 3)  $z = \sqrt{2}i$ ; 4)  $z = 2$ ; 5)  $z = -i$ .

12. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам  $z$ , удовлетворяющие условиям:

- 1)  $|z|=1$ ;      2)  $|z|\leq 5$ ; 3)  $1\leq|z|\leq 2$ ;    4)  $\arg z = 0$ ;  
 5)  $\frac{\pi}{6}\leq \arg z\leq \frac{\pi}{4}$ ;    6)  $|z-1|=\frac{1}{3}$ ;      7)  $|z-3+2i|\leq 2$ .

13. Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

- 1)  $1, -1, i, -i$ ;  
 2)  $z = 3 - 3i$ ;  
 3)  $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$ .

14. Даны числа

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}, \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \quad z_3 = \cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1)  $z_1 z_2 z_3$ ; 2)  $\frac{z_1}{z_2 z_3}$ ; 3)  $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ ; 4)  $\frac{z_1 z_3}{z_2}$ .

15. Вычислить  $|z|$  и  $\arg z$ , если  $z = \frac{1-i}{\sqrt{3+i}}$ .

16. Упростить выражение  $\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}$ .

17. Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

- 1)  $\sqrt[4]{1}$ ; 2)  $\sqrt[4]{i}$ ; 3)  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

18. Выразить в радикалах корни из единицы степени 2, 3, 4, 6, 8.

19. Представить в показательной форме комплексные числа:

- 1)  $-1 - i$ ; 2)  $\sqrt[3]{i}$ ; 3)  $\sqrt[3]{-1+i}$ .

20. Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

- 1)  $z = 2e^{\frac{\pi i}{4}}$ ; 2)  $z = 4e^{\frac{\pi i}{2}}$ ; 3)  $z = 3e^{\pi i}$ ; 4)  $z = e^i$ .

21. Найти  $z_1 z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ , результат написать в алгебраической форме.

1)  $z_1 = 1,5e^{0,7i}$ ;  $z_2 = 0,7e^{1,7i}$ ,

2)  $z_1 = e^{-0,7+3i}$ ;  $z_2 = e^{1,5+2i}$ .

22. Вычислить  $z^6$  и  $\sqrt[4]{z}$ , результаты представить в алгебраической форме и изобразить их на плоскости.

- 1)  $z = 4,2e^{2,3i}$ ; 2)  $z = 0,4\pi i$ ; 3)  $z = 3,5e^{5i}$ ; 4)  $z = -16$ .

23. Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

1.  $x^2 + x + 1 = 0$ .

2.  $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$ .

3.  $x^2 + 3x + 4 = 0$ .

4.  $x^3 - 27 = 0$ .

5.  $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ .

6.  $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$ .

7.  $x^3 - 6x + 9 = 0$ .

8.  $x^3 + 6x + 2 = 0$ .

9.  $x^3 + 24x - 56 = 0$ .

10.  $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ .
11.  $x^3 + 9x - 26 = 0$ .
12.  $x^3 - 4x + 2 = 0$ .
13.  $x^3 + 18x + 15 = 0$ .
14.  $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ .
15.  $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$ .

## 6.2. Комбинаторика

### Общие правила комбинаторики

1. Имеется пять видов конвертов и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?
3. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный так, чтобы они не лежали на одной горизонтали и вертикали?
4. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами это можно сделать?
5. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?
6. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
7. Имеется 6 пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую так, чтобы эти перчатки были различных размеров?
8. Из трех различных экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?
9. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова “КАМЗОЛ”?
10. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?
11. Составляются знаки, состоящие из геометрической фигуры (окружности, квадрата, треугольника или шестиугольника), буквы и цифры. Сколько таких знаков можно составить?
12. При составлении экипажа космического корабля необходимо учитывать психологическую совместимость экипажа. Известно, что команда состоит из трех человек: капитана, инженера и врача. Причем на должность капитана есть четыре кандидата  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , на место инженера – 3 кандидата  $i_1, i_2, i_3$  и на место врача – 3 кандидата  $v_1, v_2, v_3$ . Проведенные исследования показали, что командир  $k_1$  психологически совместим с инженерами  $i_1, i_3$  и врачами  $v_2, v_3$ ,

командир  $k_2$  – с инженерами  $i_1, i_2$  и со всеми врачами, командир  $k_3$  – с инженерами  $i_1, i_2$  и врачами  $v_1, v_3$ , командир  $k_4$  – со всеми инженерами и врачом  $v_2$ . Кроме того, инженер  $i_1$  психологически несовместим с врачом  $v_3$ , инженер  $i_2$  – с врачом  $v_1$ , инженер  $i_3$  – с врачом  $v_2$ . Сколькими способами можно составить команду корабля?

13. В Стране Чудес есть четыре города:  $A, B, B$  и  $G$ . Из города  $A$  в город  $B$  ведет 6 дорог, а из города  $B$  в город  $B$  - 4 дороги, из города  $A$  в город  $G$  - две дороги, и из города  $G$  в город  $B$  - тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от  $A$  до  $B$ ?

14. В магазине одежды продаются 5 видов костюмов троек (брюки, пиджак, жилет), 7 видов брюк, 3 вида пиджаков и 2 вида жилетов, кроме того, 3 вида костюмов-двоек (брюки, пиджак). Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую брюки, пиджак и жилет?

15. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

16. В книжном магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева “Рудин”, 3 экземпляра его же романа “Дворянское гнездо” и 4 экземпляра романа “Отцы и дети”. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы “Рудин” и “Дворянское гнездо”, и 7 томов, содержащих романы “Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Все книги различны. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

17. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

18. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты, по одной каждой масти?

19. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

20. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин (что-то одно), после чего Надя берет и яблоко и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

21. Сколькими способами можно поставить на доску две шашки - белую и черную, так, чтобы белая шашка могла бить черную? Черная белую? Обе шашки могут бить друг друга? Ни одна не может бить другую?

#### Формула включения и исключения

22. Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 - леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 - шоколад и леденцы, 348 - конфеты и леденцы, а 297 - все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

23. В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом



занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и в то же время занимаются спортом. Докажите, что в этой информации сдержатся ошибки.

24. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько человек знают только английский язык? Только французский?

25. Сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5?

26. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

27. В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 - одно ухо, 80 - одну руку и 85 - одну ногу. Страховая компания “Веселый Роджер”, в которой застрахованы пираты, задалась вопросом: каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку или ногу (страховой случай Total Permanent Disablement, при котором выплаты компании максимальны)?

Размещения с повторениями

28. Назовем натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

29. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что все студенты экзамен сдали?

30. На железнодорожной станции имеется  $m$  светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?

31. Сколькими способами можно отправить 6 писем с тремя курьерами?

32. В клубе велосипедистов считается плохим знаком иметь членский билет, в номере которого есть цифра 8. Поэтому председатель клуба решил выдавать билеты с номерами, в которые ни одна 8 не входит. Сколько было членов в группе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?

33. На флоте применяют семафор флажками. Каждой букве соответствует определенное положение флажков. Всего положений каждого флажка пять – вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно. Как правило, флажки находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Но при передаче некоторых букв оба флажка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение?

34. В селении проживают 2000 жителей. Доказать, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.

35. Каждую клетку квадратной таблицы  $2 \times 2$  можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

36. Крокодил имеет 68 зубов. Доказать, что среди  $16^{17}$  крокодилов может не оказаться двух с одним и тем же набором зубов.

37. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства? (наибольшее число зубов равно 32)

38. При передаче сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифру и знаки препинания обозначаются точками и тире. При этом для одних букв используется только один знак (E ·), а для некоторых приходится использовать пять знаков (Э · · - · ·). Почему нельзя обойтись меньшим числом знаков?

39. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спортпрогноз»? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет.

40. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть три завода, где требуются рабочие в литейный цех (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают лишь женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины. Сколькими способами могут они распределиться между этими предприятиями?

41. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв - А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Размещения без повторений

42. Сколькими способами в группе студентов из 34 человек можно выбрать старосту и казначея? Если известно, что один человек не может занимать две должности сразу. Если известно, что один человек может занимать две должности сразу.

43. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

44. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

45. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

46. Забор состоит из 100 дощечек. У Тома Сойера есть краски 150 различных цветов. Сколько существует различных раскрасок забора, если все дощечки покрашены в разный цвет? Та же задача, но дощечки могут быть покрашены в одинаковый цвет.

47. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили два различных числа?

48. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5? Тот же вопрос, но при условии, что ни одна цифра не повторяется?

49. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают ровно три имени?

50. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?

51. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? А если одна полоса обязательно должна быть красной?

52. Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 различных уроков, если изучается 14 предметов?

53. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

54. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

55. Докажите, что  $A_m^n = A_{m-1}^n + n \cdot A_{m-1}^{n-1}$ .

56. На группу из 34 человек выделено две путевки в Сочи и Евпаторию. Сколькими способами можно распределить путевки? Известно, что один человек не может получить две путевки сразу. Известно, что один человек может получить две путевки сразу.

#### Перестановки

57. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

58. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

59. В ряду зрительного зала 15 кресел. Сколькими способами можно разместить на них 15 человек?

60. На полке  $n$  различных книг. Сколькими способами их можно переставить?

61. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 6 мужчин и 6 женщин таким образом, чтобы мужчины и женщины чередовались?

62. Сколько существует перестановок из  $n$  различных элементов, в которых один данный элемент идет впереди другого данного элемента?

63. Сколько можно сделать перестановок из  $n$  различных элементов, в которых данные два стоят рядом?

64. Сколько можно сделать перестановок из  $n$  различных элементов, в которых данные два не стоят рядом?

65. Лингвисты разгадывают записи некоторого племени. Известно, что каждый символ обозначает один звук. Всего в алфавите 26 символов. Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма? Во сколько раз умень-

шится количество возможных вариантов, если ученым удалось найти 7 знаков, обозначающих гласные, и 19 согласные?

66. Сколько существует различных последовательностей длины 5, составленных из трех 1 и двух 0?

67. Сколько существует различных пятизначных чисел, составленных из трех 1 и двух 0?

68. Бусы - это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных вариантов бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

69. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

70. Сколькими способами на доске из  $n$  вертикалей и горизонталей можно расположить  $n$  ладей так, чтобы они не могли бить друг друга? Ответьте на вопрос задачи, если все ладьи одинаковы и если все они различны.

71. Слово - любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов а) «ВЕКТОР»; б) «ЛИНИЯ»; в) «ПАРАБОЛА»; г) «БИССЕКТРИСА»; д) «МАТЕМАТИКА».

#### Сочетания

72. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если:

- Все путевки различны,
- Все путевки одинаковы?

73. Сколько вариантов экзаменационной комиссии, состоящей из 5 человек, можно создать из 14 преподавателей?

74. Сколькими способами можно выбрать из  $n$  человек упорядоченную группу из  $k$  человек? Сколькими способами можно выбрать из  $n$  человек неупорядоченную группу из  $k$  человек?

75. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого - 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

76. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько сделано рукопожатий?

77. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

78. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников: одного для участия в математической олимпиаде, другого для участия в олимпиаде по физике. Сколькими способами это можно сделать, при условии, что олимпиады проходят в одно время?

79. Есть 3 билета в различные театры. Сколькими способами они могут быть распределены среди 25 студентов группы, если каждый студент может получить только один билет?

80. На группу из 25 человек выделены 3 пригласительных билета на вечер. Сколькими способами они могут быть распределены (не более одного билета в руки)?

81. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

82. В классе, в котором учатся Петя и Ваня, - 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

83. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

84. На школьном вечере присутствуют 15 юношей и 12 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танца?

85. Сколькими способами можно вырезать прямоугольник из клеток доски размером  $m \times n$ , при условии, что стороны прямоугольника состоят из целого количества клеток?

86. Докажите формулу  $P(n_1, n_2, \dots, n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-n_2-\dots-n_k}^{n_k}$  двумя способами.

#### Сочетания с повторениями

87. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов.

- Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?
- Сколькими способами можно купить 8 открыток?
- Сколькими способами можно купить 12 открыток?
- Сколькими способами можно купить 12 открыток, чтобы среди них оказались открытки 3 фиксированных типов?
- Сколькими способами можно купить 20 открыток, чтобы среди них были открытки всех типов?

88. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 4, 5, 6, 7?

89. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых является целым числом от 1 до 10?

90. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

91. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1 и 2?

92. Сколько существует различных бросаний пяти одинаковых кубиков?

#### Разные задачи

93. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 50 и 70 бегунов соответственно, надо выбрать по одному бегуну для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

94. На ферме есть 10 телят и 24 поросенка. Сколькими способами можно выбрать по одному теленку и поросенку? А просто двух любых животных?

95. В шахматном кружке занимаются 15 девочек и 20 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из двух человек, в которую обязательно должны входить одна девочка и один мальчик. Сколькими способами это можно сделать?

96. У одного филателиста есть 5 марок для обмена, а у другого - 10. Сколькими способами они могут обменять марку одного на марку другого?

97. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «КАМЗОЛ»

98. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек для участия в олимпиадах по пяти различным предметам, если известно, что все олимпиады проходят одновременно? А если все олимпиады проходят в разное время?

99. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек для участия в олимпиаде по математике?

100. Сколько слов, содержащих по пяти букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, то есть такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются?

101. Сколько вариантов итогов чемпионата по футболу из 20 команд, совпадающих в главном (то есть 3 призера и 4 вылетевшие команды)?

102. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1 и 2?

103. Сколько существует десятизначных чисел, в которых пять цифр 1, три цифры 2 и две цифры 3?

104. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

105. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

106. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга а) две ладьи; б) двух королей; в) двух слонов; г) двух коней; д) двух ферзей?

107. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

108. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в 3 комнаты: одно-, двух- и четырехместную?

109. На группу из 34 человек выделено две путевки в Сочи и Евпаторию. Сколькими способами можно распределить путевки? Известно, что один человек не может получить две путевки сразу.

110. На группу из 15 человек выделено три путевки в Сочи, Евпаторию и Анапу. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно,

что один человек не может получить две путевки сразу? Если известно, что один человек может получить сразу несколько путевок.

111. На группу из 15 человек выделено три путевки в Сочи. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?

112. На группу из 15 человек выделено 15 различных путевок. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?

113. На группу из 15 человек выделено 5 путевок в Сочи, 3 в Евпаторию и 7 в Анапу. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?

114. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

115. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

116. Сколько диагоналей в выпуклом  $n$ -угольнике?

117. В классе 30 человек. Сколько способов разбить класс на две группы и в каждой выбрать старосту?

118. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

119. Сколько гирлянд можно составить из 5 красных шариков, 2 зеленых и 3 синих?

120. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

121. Сколько всего 6-значных чисел а) без единиц в записи. б) по крайней мере с одной единицей в записи.

122. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

123. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

124. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы а) среди них был ровно один туз? б) ни одного туза в) среди них был хотя бы один туз?

125. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по 3 четных и нечетных цифры?

126. Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

127. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

128. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

129. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

130. На плоскости даны 5 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

131. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?

132. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

133. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

134. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более 3 юношей?

135. Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных?

136. Найти сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 3, 4.

137. Сколькими способами можно расставить  $n$  нулей и  $k$  единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

138. Сколько способов выстроить в шеренгу 213 группу (25 человек)? А если ребята (9 человек) не стоят рядом?

139. На книжной полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

140. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить леди Дженивьеру. Сколькими способами это можно сделать, если среди выбранных рыцарей не должно быть врагов?

141. Сколькими способами можно переставить буквы слова обороноспособность так, чтобы никакие две буквы «о» не шли подряд?

142. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли подряд?

Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

### 6.3. Множества и операции над ними

#### I.

1. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

2. Из 40 студенток 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько студенток умеют плавать и играть в шахматы?



3. 20 мальчиков поехали на пикник. При этом 5 из них обгорели, 8 были сильно покусаны комарами, а 10 остались всем довольны. Сколько обгоревших мальчиков не было покусано комарами? Сколько покусанных комарами мальчиков также и обгорели? (*Сформулируйте эту задачу как лингвистическую, например: анализ наличия 2 предлогов в предложениях; и в общем виде, используя понятия: множество, подмножества и их элементы*)

4. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

5. В олимпиаде по иностранному языку принимало участие 40 студентов, им было предложено ответить на один вопрос по лексикологии, один по страноведению и один по стилистике. Результаты проверки ответов представлены в таблице:

<i>Получены правильные ответы на вопросы</i>	<i>Количество ответов</i>
по лексикологии	20
по страноведению	18
по стилистике	18
по лексикологии и страноведению	7
по лексикологии и стилистике	8
по страноведению и стилистике	9

Известно также, что трое не дали правильных ответов ни на один вопрос. Сколько студентов правильно ответили на все три вопроса? Сколько студентов правильно ответили ровно на два вопроса?

6. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по сочинению—48 абитуриентов, по истории—37, по английскому языку—42, по сочинению или истории—75, по сочинению или английскому языку—76, по истории или английскому языку—66, по всем трем предметам—4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

7. 180 студентов одного курса сдавали экзамены по английскому языку и истории. 15 из них не сдали экзамен по истории, 10 не сдали экзамен по английскому языку и 5 не сдали обоих экзаменов. Сколько студентов не сдали экзамен по истории и сдали экзамен по английскому языку? Сколько студентов сдали экзамен по истории и не сдали экзамен по английскому языку?

8. Каждый из студентов 3 курса в летние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли А, В и С видели соответственно 25, 12 и 23 студента. Сколько студентов на 3 курсе? Сколько из них видели спектакли А и В, А и С, В и С?

9. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы А, В и С. Из 40 студентов, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо

один из трех, фильм А видели 13, фильм В – 16, фильм С – 19. Найти, сколько студентов просмотрели все три фильма.

10. Преподаватель решил узнать, кто из 40 студентов читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу А читало 25 человек, книгу В – 22, книгу С – также 22. Книгу А или В читали 33 студента, А или С – 32, В или С – 31; все три книги прочли 10 студентов. Сколько студентов прочли только по одной книге? Сколько студентов не читали ни одной из этих трех книг?

11. В спортивном лагере 65% студентов умеют играть в футбол, 70% – в волейбол и 75% – в баскетбол. Каково наименьшее число студентов, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

## II.

1. Дано  $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{b, c, d, f\}$ ,  $C = \{a, c, e\}$ ,  $D = \{c, d, e, f\}$ . Задать перечислением элементов множества:

а)  $A \cap B$ ; б)  $A \cup C$ ; в)  $\bar{D}$ ; г)  $C \setminus A$ ; д)  $A \setminus C$ ;

е)  $B \Delta D$ ; ж)  $(A \cup \bar{C}) \setminus B$ ; з)  $(B \setminus C) \cap \bar{D}$ ; и)  $(\bar{A} \cap B) \Delta (\bar{D} \cup C)$ .

2. Дано  $N_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,

$$A = \{a \mid a \in N_{10}, a - \text{четное}\},$$

$$B = \{b \mid b \in N_{10}, b \leq 5\}, C = \{c \mid c \in N_{10}, c > 3\}.$$

Задать множества:

а)  $\bar{A}$ ; б)  $\bar{B}$ ; в)  $A \cup C$ ; г)  $C \cap B$ ; д)  $B \setminus A$ ; е)  $C \setminus A$ ;  
ж)  $B \Delta C$ ; з)  $A \Delta C$ ; и)  $\bar{A} \cup B$ ; к)  $\overline{A \Delta B}$ ; л)  $\bar{B} \setminus (A \cap C)$ .

3. Справедливы ли равенства:

а)  $\{e, f, d\} = \{d, e, f\}$ ; б)  $\{x \mid x \in N, x \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;

в)  $\{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ , если  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3, 4\}$ ;

г)  $\{1, 8, 27\} = \{1^3, 2^3, 3^3\}$ ; д)  $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} = \{a, b, c\}$ ; е)  $\emptyset = \{\emptyset\}$ .

4. Построить диаграммы Эйлера-Венна для множеств:

а)  $\bar{A} \cap B$ ; б)  $A \cap (B \cup C)$ ; в)  $(A \cup B) \setminus C$ ;  
г)  $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ ; д)  $(A \Delta C) \cup (A \Delta B)$ ; е)  $(A \cup \bar{B}) \setminus (\bar{C} \Delta A)$ .

5. Задать табличным способом множества:

а)  $\bar{A} \cap B$ ; б)  $(A \setminus C) \cup \bar{B}$ ; в)  $(A \Delta C) \cup (B \cap C) \cup (\overline{D \Delta A})$ .

6. Доказать тождества (разными способами):

а)  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ; б)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ; в)  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ ;

г)  $(A \cup B) \cap A = A$ ; д)  $(A \cap B) \cup A = A$ ; е)  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ;

ж)  $A \Delta (A \Delta B) = B$ ; и)  $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$ .

7. Доказать тождества (с помощью таблицы):

а)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ; б)  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ ;

в)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ; г)  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ ;

д)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ ;

е)  $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$ .

8. Доказать, что:

а)  $(A \setminus B) \setminus C \subseteq (A \cup C) \setminus B$ ; б)  $A \Delta B = A \setminus B$ , если  $B \subseteq A$ ;

в)  $A \cap B \subseteq C$ , если  $A \subseteq (\overline{B} \cup C)$ ; г)  $A = \overline{B}$ , если  $A \cap B = \emptyset$  и  $A \cup B = U$ .

9. Найти булеан множеств:

а)  $A = \emptyset$ ; б)  $A = \{\emptyset\}$ ; в)  $A = \{x\}$ ; г)  $A = \{x, y\}$ ;

д)  $A = \{m, n, k\}$ ; е)  $A = \{a, b, c\}$ ; ж)  $A = \{-3, \sqrt{2}, 7, 0\}$ ; з)

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ .

10. В отделе магазина посетители покупали либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. Известно, что было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

11. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют и плавать и играть в шахматы?

12. В классе обучаются 42 ученика. Из них 16 участвуют в секции по легкой атлетике, 24 – в футбольной секции, 15 – в шахматной секции, 11 – и в секции по легкой атлетике, и в футбольной секции, 8 – и в легкоатлетической, и в шахматной, 12 – и в футбольной, и в шахматной, а 6 – во всех трех секциях. Остальные школьники увлекаются только туризмом. Сколько школьников являются туристами?

13. В отделе работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский язык, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают и английский и немецкий, 3 – и немецкий и французский, 2 – и французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Сколько человек знают только один язык?

14. Среди абитуриентов оценку «отлично» получили: по математике – 48 человек, по физике – 37, по русскому языку – 42, по математике или физике – 75, по математике или по русскому языку – 76, по физике или по русскому языку – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получили только одну пятерку?

### III.

1. Даны множества  $X = \{x, y\}$ ,  $Y = \{x, y, z\}$ . Задать следующие множества:

а)  $X \times Y$ ; б)  $Y \times X$ ; в)  $X^2$ ; г)  $X \times Y \times X$ .

2. Задать перечислением пар следующие бинарные отношения. Построить матрицы данных отношений. Найти  $Dom(R)$ ,  $Im(R)$ ,  $\bar{R}$ ,  $R^{-1}$ :

- а)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\}, x < y\}$ ;  
 б)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, (x + y) \text{ четно}\}$ ;  
 в)  $R = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, y \in \{12, 16\}, x \text{ делит } y\}$ .

3. Задать перечислением пар бинарные отношения  $R \circ P$ ,  $P^{-1} \circ \bar{R}$ .

Найти  $Dom(\bar{R} \circ P^{-1})$ ,  $Im(R \circ P)^{-1}$ :

- а)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3\}, x + 5y - \text{четно}\}$ ,  
 $P = \left\{ (x, y) \mid x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{4, 5\}, \frac{y}{x} - \text{целое число} \right\}$ ;  
 б)  $R = \{(x, y) \mid x \in \{4, 6\}, y \in \{2, 5, 7\}, |x - y| < 3\}$ ,  
 $P = \{(x, y) \mid x \in \{2, 5, 7\}, y \in \{5, 7\}, 20 \leq xy \leq 40\}$ .

4. Определить, выполняются ли для отношений свойства рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, эквивалентности, полноты:

- а) отношения “жить в одном городе” на множестве людей;  
 б) “быть моложе” на множестве людей;  
 в) отношение  $\geq$  на множестве  $\mathbb{R}$ ;  
 г)  $R = \{(m, n) \mid m \text{ и } n \text{ взаимно просты}\}$  на множестве  $N$ ;  
 д)  $R = \{(m, n) \mid m - n = 2\}$  на множестве  $N$ ;  
 е)  $R = \{(x, y) \mid (x + 2y) \text{ делится на } 3\}$  на множестве  $Z$ .

5. Определить, выполняются ли для отношений задач 2а), 2б) свойства рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, полноты. Какие из этих отношений являются эквивалентностями?

6. Доказать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:

- а)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2\}$ ;      б)  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, (x - y) \in Z\}$ .

7. Выяснить, какие из следующих подмножеств множества  $Z \times Z$  являются функциями из  $Z$  в  $Z$ :

- а)  $\{(n, 2n) \mid n \in Z\}$ ;      б)  $\{(2n, n) \mid n \in Z\}$ ;      в)  $\{(n^3, n) \mid n \in Z\}$ ;      г)  $\{(n, n + 4) \mid n \in Z\}$ .

8. Выяснить, какие из функций являются взаимно-однозначными из  $R$  в  $R$ :

- а)  $f(x) = e^x$ ;      б)  $f(x) = x^2$ ;      в)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ;      г)  $f(x) = x^3 - x$ ;      д)  $f(x) = 2x + 1$ .

9. Определить, является ли отношение  $R: A \rightarrow B$  функцией, инъекцией, сюръекцией, биекцией:

- а)  $R = \{(a,1), (a,2), (c,3)\}$ ,  $A = \{a,b,c\}$ ,  $B = \{1,2,3\}$ ;  
 б)  $R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ ,  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ;  
 в)  $R = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$ ,  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{a,b,c\}$ ;  
 г)  $R = \{(1,1), (2,1), (3,4), (4,3)\}$ ,  $A = \{1,2,3,4\}$ ,  $B = \{1,2,3,4\}$ ;  
 д)  $R = \{(x,a), (y,a), (z,c)\}$ ,  $A = \{x, y, z\}$ ,  $B = \{a,b,c,d\}$ .

#### 6.4. Метод математической индукции

1. Доказать, что при любом натуральном  $n$ :

- а)  $n(2n^2 - 3n + 1)$  кратно 6;  
 б)  $11^{n+1} + 12^{2n-1}$  делится нацело на 133;  
 в)  $n^5 - n$  кратно 5;  
 г)  $n^7 - n$  кратно 7.

2. Методом математической индукции доказать справедливость равенств для каждого натурального значения  $n$ :

- а)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$ ;  
 б)  $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$ ;  
 в)  $0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n - 1)n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12}$ ;  
 г)  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n - 3)(4n + 1)} = \frac{n}{4n + 1}$ .

3. Методом математической индукции доказать справедливость следующих неравенств для всех натуральных  $n > 1$ :

- а)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ;      б)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ .

#### 6.5. Бином Ньютона

Разложить по формуле бинома Ньютона  $(1 - 2)$ :

- а)  $(x - x^{-1})^5$ ;    б)  $(x + 2)^6$ .
- а)  $\left(a^2 + \frac{1}{a^4}\right)^5$ ;    б)  $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^4$ .
- В разложении  $(1+x)^8 + (1+x)^9$  найти коэффициент члена, содержащего  $x^5$ .
- Найти 5-й член разложения  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$ .

5. Третий коэффициент разложения  $(1+x)^n$  равен 45. Найти четвертый коэффициент от конца.

6. В разложении  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$  коэффициент третьего члена разложения больше коэффициента второго на 35. Найти член разложения, не содержащий  $x$ .

7. Найти член разложения  $(3x+2)^7$  с наибольшим коэффициентом.

8. Найти член разложения  $(2+x+x^2)^9$ , содержащий  $x^2$ .

9. Найти третий член разложения  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\sqrt[3]{x}\right)^n$ , если сумма всех биномиальных коэффициентов этого разложения равна 2048.

10. Найти член разложения  $\left(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$ , не содержащий  $a$ .

11. Упростить выражение  $\left(\frac{a+1}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{a-1}{a - a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$  и найти член разложения, который не содержит “ $a$ ”.

12. Сумма коэффициентов первого, второго и третьего слагаемых разложения  $\left(a^2 + \frac{1}{a}\right)^n$  равна 46. Найти член разложения, не содержащий “ $a$ ”.

13. В разложении  $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$  коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго члена. Найти свободный член.

14. Сколько рациональных членов содержится в разложении  $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ ?

### Список литературы

1. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск, 2001.

2. Ахо А., Хокпкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.

3. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач. – 4-е издание. – Мн.: ТетраСистемс, 2006. – 288 с.

4. Гусак А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т.1.: Учебник для студентов вузов. – 6-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2007. – 544 с.

5. Гусак А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т.2.: Учебник для студентов вузов. – 6-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2007. – 448 с.

6. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 частях. – Мн.: Выш. шк., 1988.

7. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие к решению задач. – 4-е издание. – Мн.: ТетраСистемс, 2006. – 416 с.

8. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. – 6-е издание. – Мн.: ТетраСистемс, 2007. – 288 с.
9. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
10. Коновалова И.Н. и др. Комплексные числа и их приложения. Учебное пособие / Кафедра высшей математики МБФ, ГОУ ВПО РГМУ Росздрави, 2007.
11. Корнилов П.А., Никулина Н.И., Семенова О.Г. Элементы дискретной математики. Учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д.Ушинского, 2005. 91 с.
12. Лихтарников, Л.М. Математическая логика/ Л.М.Лихтарников, Т.Г.Сукачева. С.- Петербург: Лань, 2008.–288с.
13. Матейко О.М., Плащинский П.В. Высшая математика. Примеры и задачи: учебно-методическое пособие для студентов географического факультета. – Мн.: БГУ, 2005. – 47 с.
14. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов. – Минск.: Тетрасистемс, 2001.
15. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
16. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. - М.: Рольф, 2001. - 288 с.
17. Практикум по математике для студентов ФПРР/Авт.-сост.: Л.Л. Дудко, В.Е. Рыбакова / Новгород, НовГУ им. Ярослава Мудрого, 1995.–52с.
18. Серапинас Б.Б. Математическая картография: Учебник для вузов. – М.: Академия, 2005. – 336 с.
19. Современные философские проблемы математических, естественных и технических наук. Учебно-методическое пособие для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук/ Сост. А.Г. Деменев. – Архангельск: Изд-во АГТУ. – с. 78.
20. Стефанова, Н.Л. Математика и информатика/ Н.Л.Стефанова, В.Д.Будаев и др. М.: Высшая школа, 2004.– 349с.
21. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
22. Турецкий, В.Я. Математика и информатика. – М.:ИНФРА-М, 2005. – 560с. УДК 167/168:001
23. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2002.

Ефременкова Ольга Валентиновна

## ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

Методическое пособие  
для студентов направления «Электроэнергетика и электротехника»  
заочной формы обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 20.11.13. Формат 60x84/16.  
Усл. печ. л. 4,44 . Тираж 100 экз. Зак.131216 Рег. № 68.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института  
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.